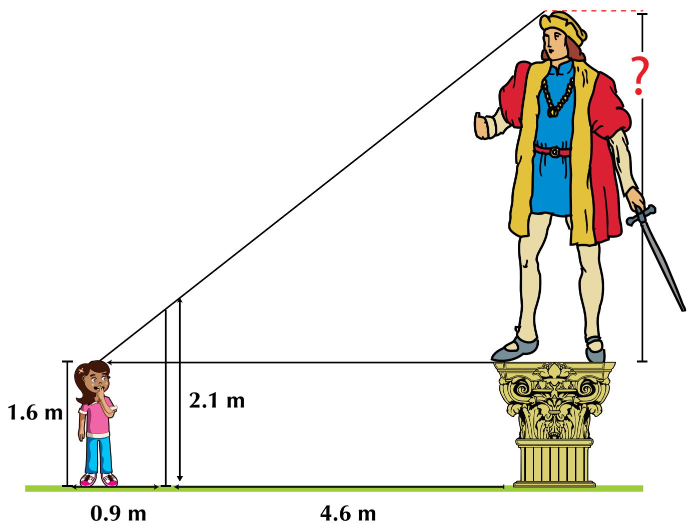
Tabla de contenido

Geometría

Resolvamos

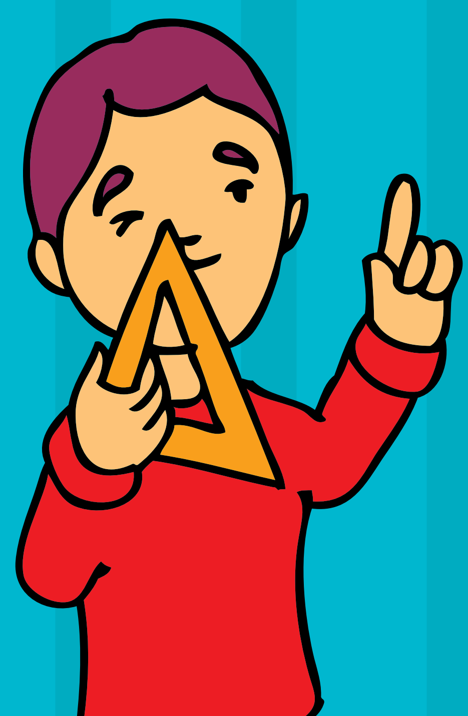
Te has preguntado: ¿Cuál es la importancia de las figuras y de los cuerpos geométricos en la vida de las personas?



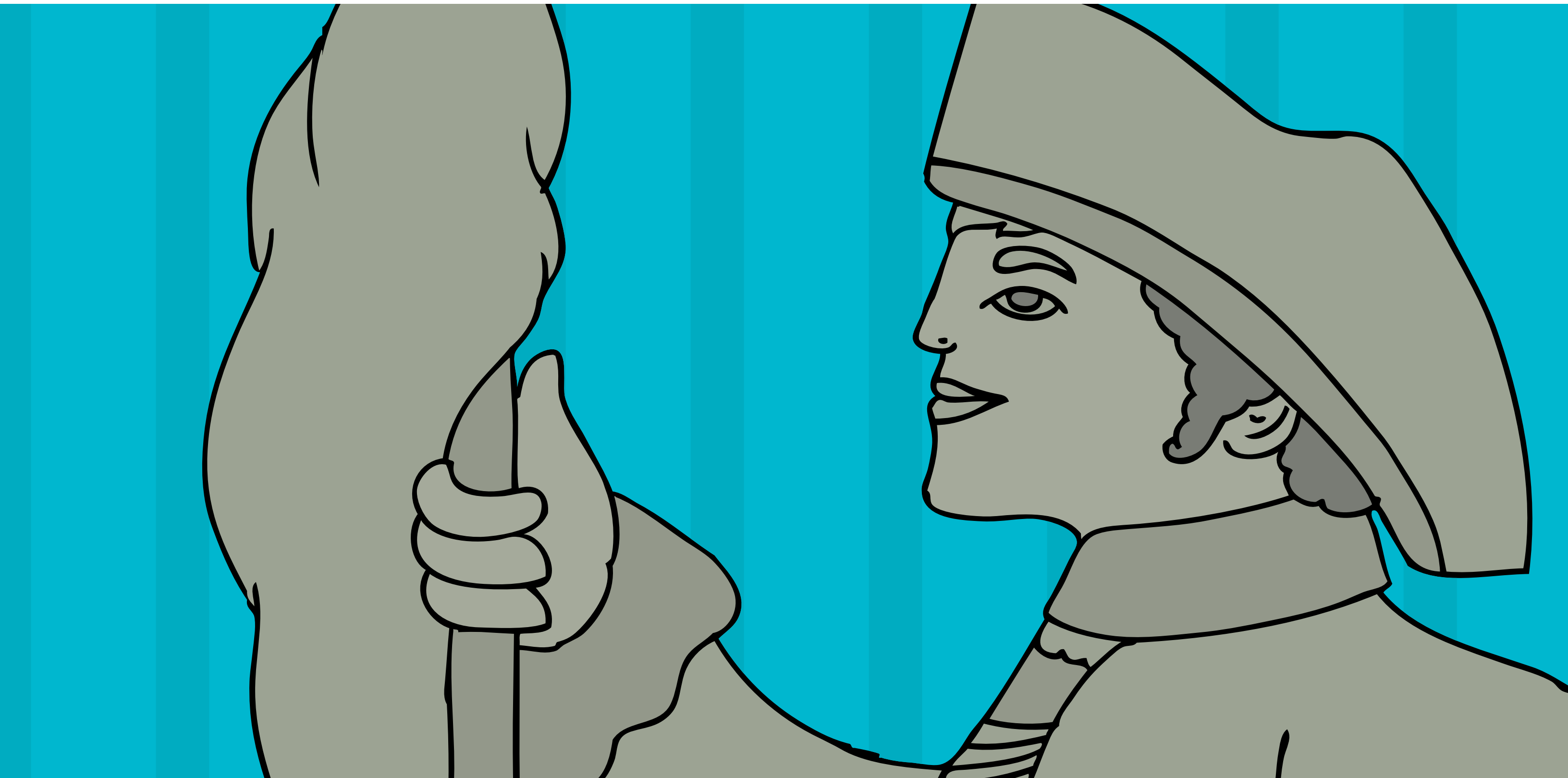
Sofía, está calculando la altura del cuerpo del hombre de la estatua. Para lograrlo ha diseñado un plano que le ayudará a encontrarla.

Sofía piensa que comparando respectivamente las medidas conocidas en su plano podrá descubrir la altura del cuerpo del hombre de la estatua.

En el desarrollo de esta unidad están los contenidos para el aprendizaje de los temas, tales como: la congruencia y semejanza de triángulos, los teoremas de Tales y Pitágoras, las propiedades de los triángulos y cuadriláteros, con los cuales solucionarás y resolverás problemas de la vida cotidiana como el de la situación que tiene Sofía. Además encontrarás temas para calcular áreas de regiones planas y los volúmenes de algunos sólidos como el cubo, el prisma y la pirámide.



Referentes de calidad	Capítulos
Estándar	1. Congruencia y semejanza. 2. Sólidos geométricos.
Conjeturo y verifico propiedades de congruencia y semejanza entre figuras bidimensionales y entre objetos tridimensionales en la solución de problemas.	
Reconozco y contrasto propiedades y relaciones geométricas utilizadas en demostración de teoremas básicos (Pitágoras y Tales).	
Aplico y justifico criterios de congruencias y semejanza entre triángulos en la resolución y formulación de problemas.	
Uso representaciones geométricas para resolver y formular problemas en las matemáticas y en otras disciplinas.	
Generalizo procedimientos de cálculo válidos para encontrar el área de regiones planas y el volumen de sólidos.	



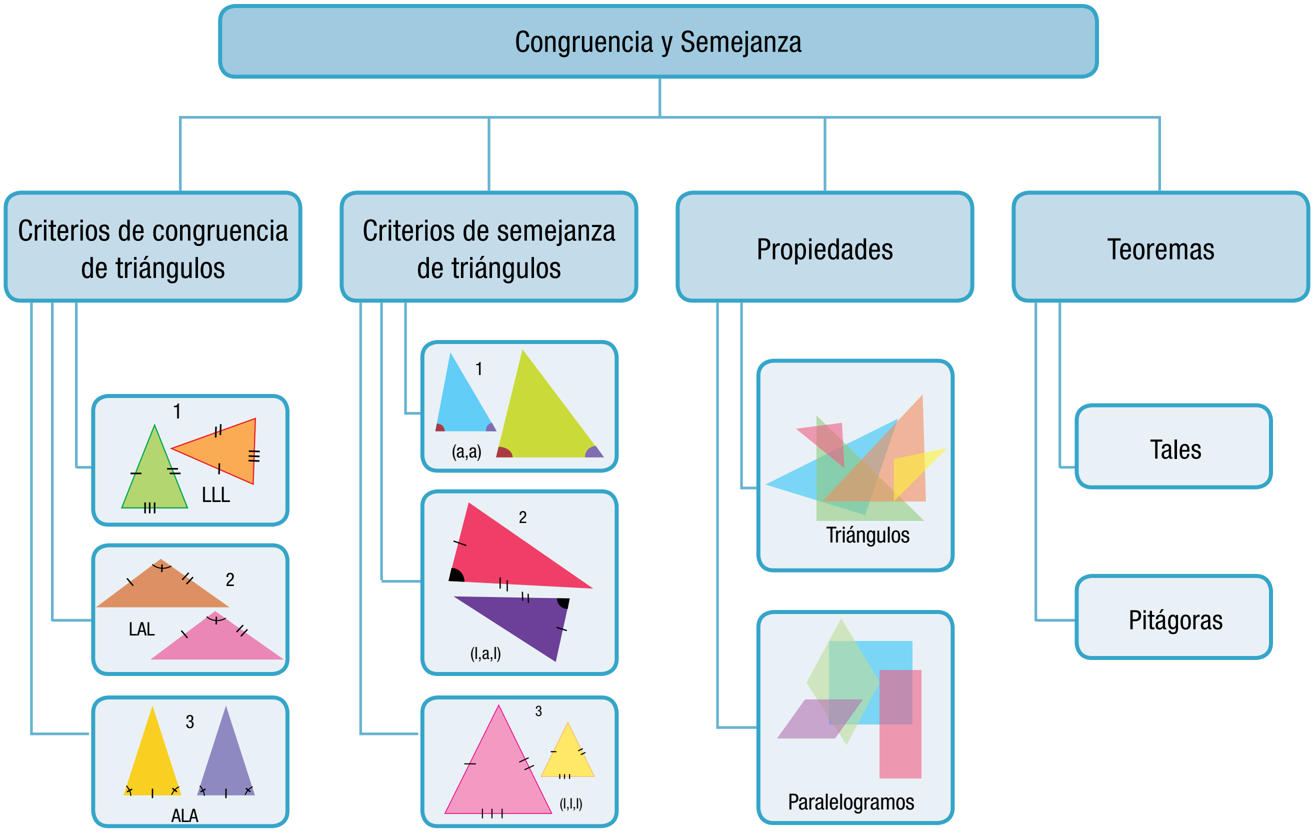
Congruencia y semejanza

Cuando una persona tiene ciertos rasgos físicos que son muy similares a los de otra, decimos que se parecen.

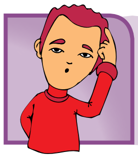
En geómetra, existen casos en los que se presentan ciertas similitudes entre figuras y es entonces cuando hablamos de semejanzas y de congruencias.

Al observar y comparar figuras geométricas, se advierte que, en algunos casos, dos de ellas tienen la misma forma pero no el mismo tamaño y, en otros casos, puede ser que sean de igual forma y tamaño.

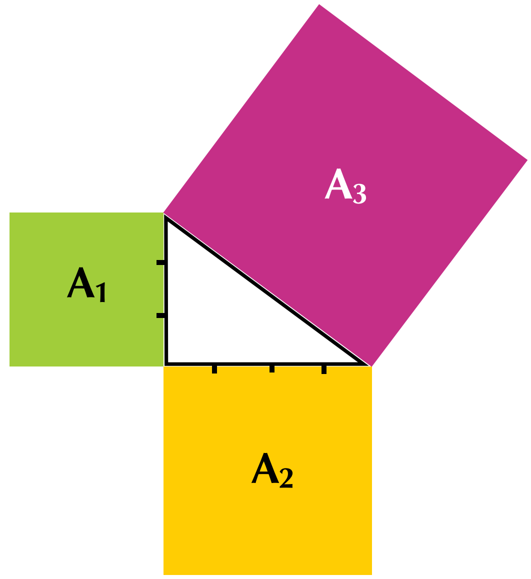
¿Cuando se puede afirmar que dos triángulos son semejantes? Para contestar esta pregunta es necesario que se cumplan algunas condiciones que se analizaremos en este capítulo.



Tema 1. Teoremas



Indagación



¿Recuerdas qué es un teorema?

Piensa en una definición de teorema y coméntala con algunos compañeros.

Después realiza la actividad siguiente, referida al teorema de Pitagoras:

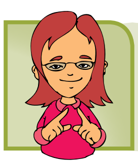
En una hoja de papel cuadriculado dibuja los cuadrados A_1 y A_2 de lados 3 y 4 respectivamente.

Calcula el área de los cuadrados A_1 y A_2.

Dibuja el cuadrado A_3 y calcula el área utilizando las áreas A_1 y A_2.

¿Cuánto mide el lado del cuadrado A_3?

¿Qué relación hay entre las áreas de los cuadrados A_1, A_2 y A_3?



Conceptualización

Teorema de Tales

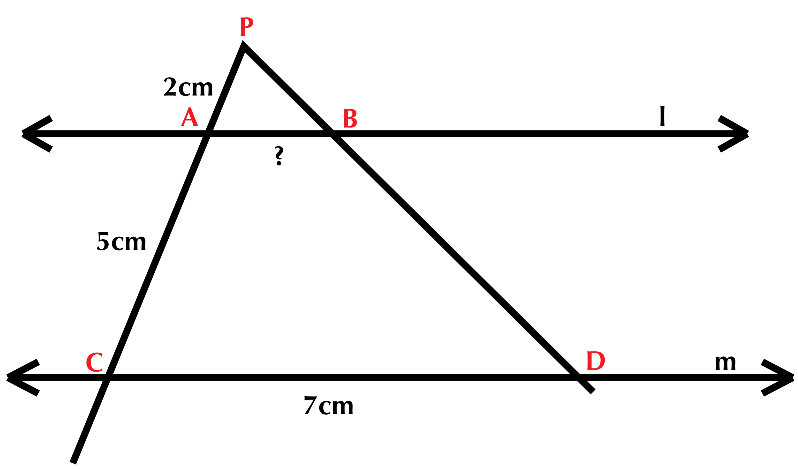
Tales de Mileto fue uno de los grandes geómetras de la antigua Grecia y uno de los primeros en usar métodos deductivos en geometría. Sus métodos permitieron encontrar medidas de difícil acceso en forma directa.

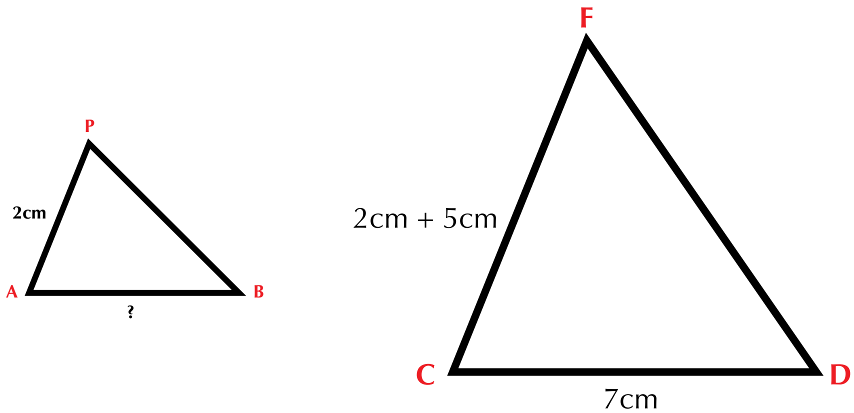
Te invitamos a que, junto con tus compañeros de grupo se acerquen a los hallazgos de Tales de Mileto.

Dibuja rectas paralelas l y m, luego dibuja dos segmentos de recta oblicuos que se tocan en el punto A.

Los puntos de corte de los segmentos oblicuos con la paralela l, vamos a llamarlos A y B y los puntos de corte de los segmentos oblicuos con la paralela m, los llamaremos C y D.

Observa que en la figura podemos identificar dos triángulos: $\triangle PAB$ y el triángulo $\triangle PCD$.





Llamando ***x*** al lado del triángulo marcado con ***?*** y estableciendo la proporción entre sus lado homólogos tenemos que:

2cm es a (2cm+5cm) como x es a 7cm

Escrito de otra manera diremos: $\frac{PA}{AB} = \frac{PC}{CD}$

Reemplazando valores obtenemos: $\frac{2cm}{7cm} = \frac{x}{7cm}$

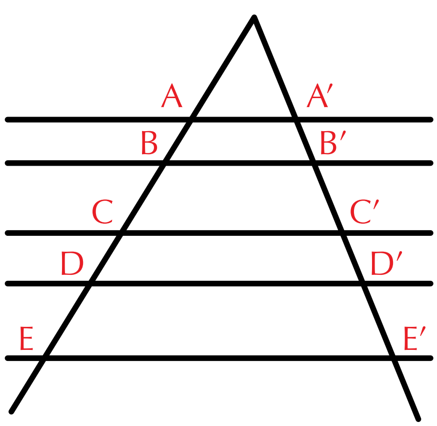
Despejando x:

$$A = \frac{(2cm)\overset{1}{\cancel{(7cm)}}}{\underset{1}{\cancel{7cm}}} = \frac{2cm}{1} = 2cm$$

También puede establecerse las razones entre los segmentos de las transversales cortados por las paralelas y este resultado se conoce con el nombre de teorema de Tales:

En general

Si tres o más paralelas son cortadas por transversales, entonces, la razón entre las medidas de los segmentos determinados en una transversal es igual a la razón de las medidas de los segmentos correspondientes de la otra, por lo que son proporcionales.

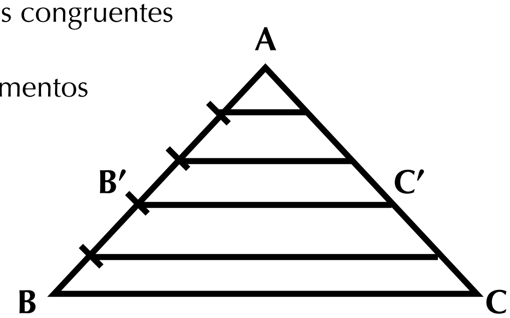


Esta proporcionalidad permite, en nuestro caso, escribir las siguientes igualdades con respecto a las medidas de los segmentos:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{BE}{B'E'}$$

Observa la forma siguiente de justificar el teorema de Tales.

En el triángulo ABC, el lado AB se divide en cinco segmentos congruentes entre sí, tomando cada segmento como 1 unidad.



Se traza el segmento B´C′ paralelo al BC y se forman los segmentos AB′ y BB′.

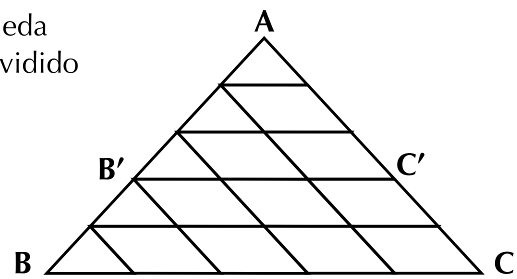
Para determinar la razón que existe entre las medidas de los segmentos AB′ (tiene 3 segmentos) y AB (tiene 5 segmentos), se tiene que:

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{3}{5}$$

De la figura se obtiene que AC, al igual que AB está dividida en cinco segmentos y AC′ abarca tres de ellos, por lo que la razón entre ellos es:

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{3}{5}$$

Si ahora se trazan paralelas a AC′, se observará que BC′ ′ queda dividido en tres segmentos congruentes entre sí, y BC queda dividido en cinco segmentos.



Por lo que resulta: $\frac{B'C'}{BC} = \frac{3}{5}$

Lo cual quiere decir que si $\overline{B'C'} \parallel \overline{BC}$ entonces:

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$$

Además, en la figura se observa que los ángulos de los dos triángulos son congruentes, esto es:

$\angle A \cong \angle A'$ por la propiedad reflexiva de la congruencia de ángulos.

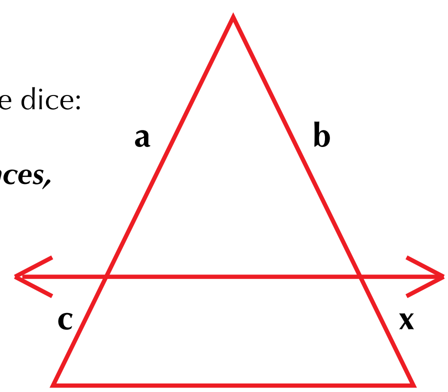
$\angle B \cong \angle B'$ porque son ángulos correspondientes entre paralelas.

$\angle C \cong \angle C'$ por la razón anterior.

Esto indica que los triángulos ABC y A′B′C′ son semejantes, ya que sus ángulos correspondientes son congruentes y sus lados proporcionales.

De aquí se deriva otra forma de enunciar el teorema de Tales, que dice:

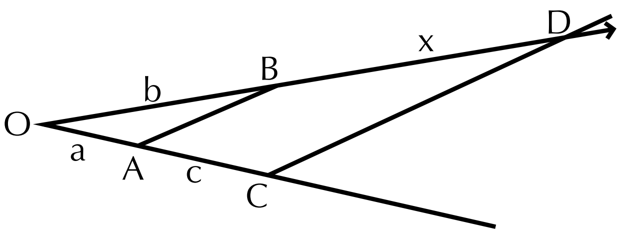
Si en un triángulo una recta es paralela a uno de sus lados, entonces, ésta divide a los otros dos lados en segmentos proporcionales y los triángulos formados son semejantes.



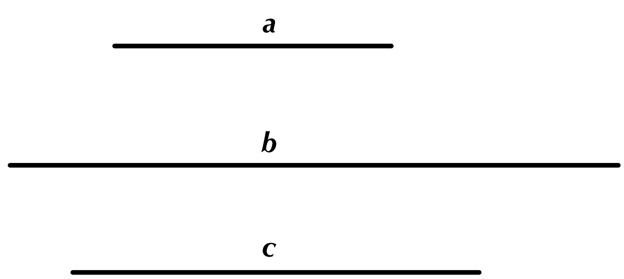
Cuarta proporcional

Si se conoce la longitud de tres segmentos, ¿cómo encontrar un cuarto segmento que forme proporción con ellos?

Es decir que la razón entre dos de ellos, conocidos, por ejemplo: $\frac{a}{b}$ sea la misma que entre el otro segmento y el que buscamos: $\frac{c}{x}$, en donde x es el cuarto segmento.



La proporción que establecemos es: $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$



Sobre dos semirrectas, con origen común O, y a partir de él se colocan cada uno de los segmentos a y b:

Se unen A y B, extremos respectivos de los segmentos a y b.

A partir de A se coloca el segmento c. Por el extremo C de este segmento se traza una paralela a AB hasta cortar la semirrecta, sobre la cual está b, en el punto D se determina así el segmento BD.

Por el teorema de Tales, ¿cómo son los segmentos correspondientes que sobre rectas concurrentes son determinados por el corte de rectas paralelas?

¿Cómo son las razones: $\frac{OB}{OA}$ y $\frac{BD}{AC}$? o sea las razones: $\frac{a}{b}$ y $\frac{x}{c}$

De tus conocimientos aritméticos recordarás que una proporción es una igualdad de dos razones, en donde las dos razones tienen el mismo valor; una proporción se expresa de la siguiente forma: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

En una proporción intervienen 4 términos, esto es, a, b, c y d; debido a ello, se le llama cuarta proporcional a cada uno de los términos de una proporción.

Por lo tanto se tiene que:

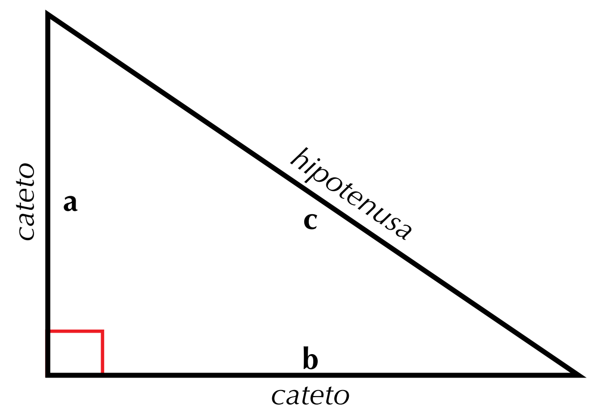
a es cuarta proporcional de b, c, d.
b es cuarta proporcional de a, c, d.
c es cuarta proporcional de a, b, d.
d es cuarta proporcional de a, b, c.

Teorema de Pitágoras

Pitágoras fue un filósofo nacido en Samos, región de Grecia, hacia el siglo VI antes de C., sus obras fueron fundamentales para las matemáticas, aunque también muy importantes sus aportes en el campo de la filosofía. Pitágoras es autor de famosos legados, entre ellos el teorema que lleva su nombre.

"En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos".

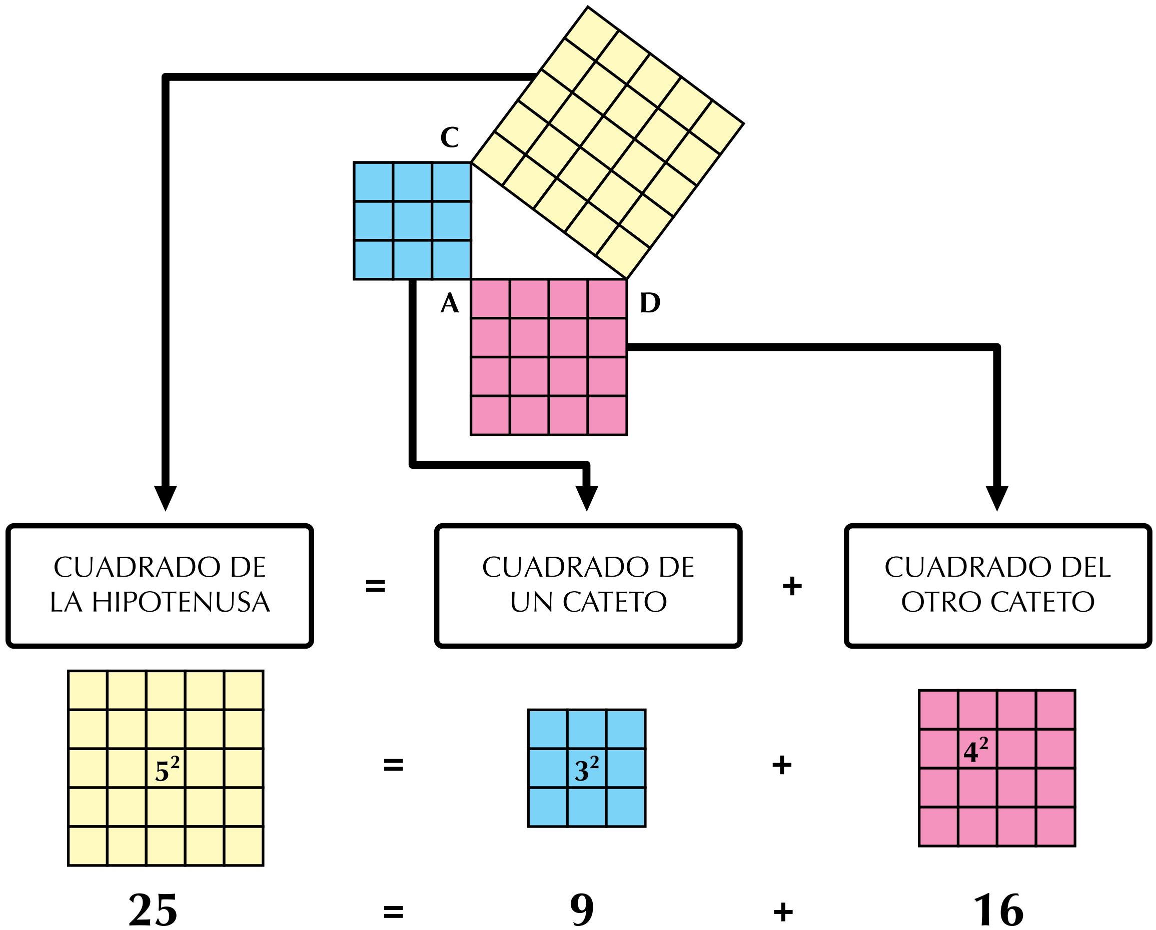
En todo triángulo se cumple esta propiedad que se conoce con el nombre de **Teorema de Pitágoras**.



$\mathbf{c^2 + a^2 + b^2}$

Veamos otro ejercicio:

En el triángulo rectángulo ABC cuyos lados miden 3, 4 y 5 unidades, se dibuja un cuadrado sobre cada uno de ellos.

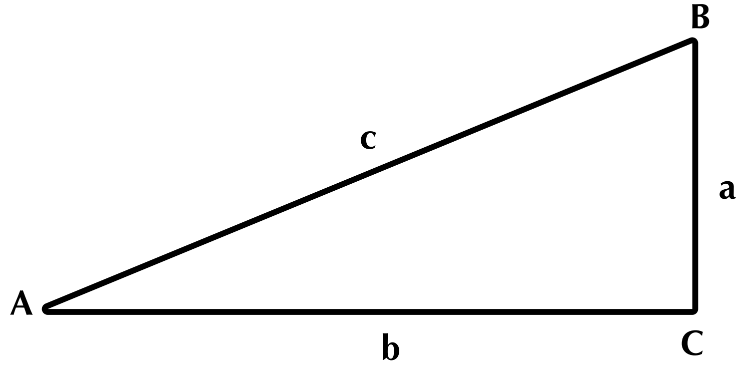


Observa que el cuadrado de la medida del lado mayor (hipotenusa) es equivalente a la suma de los cuadrados de las medidas de los lados menores (catetos).

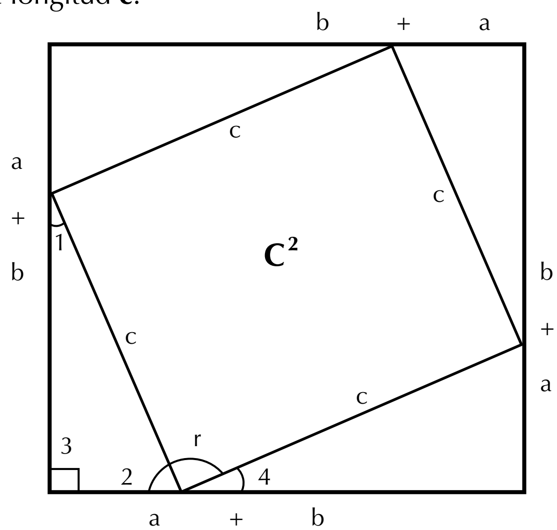
Se ha comprobado el teorema para dos triángulos particulares. Ahora se demostrará para todo triángulo rectángulo:

Sea el triángulo rectángulo ABC con **a** y **b** catetos y **c** la hipotenusa.

Hay que demostrar que $a^2 + b^2 = c^2$.



Trazamos un cuadrado con una longitud **a + b** en cada uno de sus lados, y en su interior cuatro triángulos rectángulos congruentes cuyos catetos sean **a** y **b** y una hipotenusa la longitud **c**.



Los ángulos 1 y 2 suman 90º por ser ángulos de un triángulo rectángulo: $m < 1 + m < 2 = 90^{o}$

Los ángulos 2, 4 y r suman 180º por formar un ángulo colineal o llano: $m < 2 + < m\ r + m < 4 = 180^{o}$

Los ángulos 1 y 4 son iguales por ser homólogos: $m < 1 = m < 4$ y como $m < 1 + m < 2 = 90^{o}$, entonces $m < 4 + m < 2 = 90^{o}$, por lo tanto $m < r = 90^{o}$.

Esto sucede con los cuatro ángulos del cuadrilátero; entonces es un cuadrado. Dado que el todo es igual a la suma de sus partes, se tiene:

$$\underbrace{(a+b)^2}_{\text{Área del cuadrado de lado a + b}} = \underbrace{c^2}_{\text{Área del cuadrado de lado c}} + \underbrace{4\left[\frac{ab}{2}\right]}_{\text{Área de los 4 triángulos}}$$

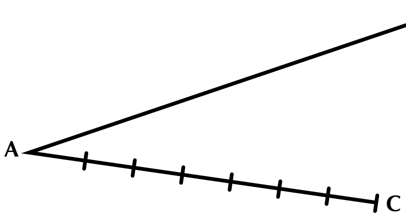
y como $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, entonces: $a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 4\left[\frac{2b}{2}\right]$
$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab$

Restando a ambos miembros 2ab, se tiene:
$a^2 + 2ab - 2ab + b^2 = c^2 + 2ab - 2ab$
$a^2 + b^2 = c^2$ que es lo que se quería demostrar.

Si en un triángulo rectángulo se sabe la medida de dos de sus lados, entonces, la medida del tercero se obtendrá al aplicar este teorema.

Aplicación

1. Divide el segmento AB en 7 partes de igual longitud. Hazlo en tu cuaderno.

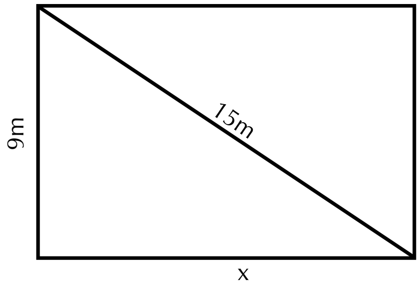


Usa el segmento AC dividido en centímetros.

a. ¿Cómo procedes si aplicas el teorema de Tales?

b. Encuentra el cociente $\frac{AB}{AC}$ y compáralo con el cociente entre la longitud de una división sobre AC y su correspondiente sobre AB

2. La diagonal de un terreno rectangular mide 15 m y de ancho mide 9 m; ¿cuánto medirá el largo del terreno?



Aplica el teorema de Pitágoras para solucionar los siguientes problemas:

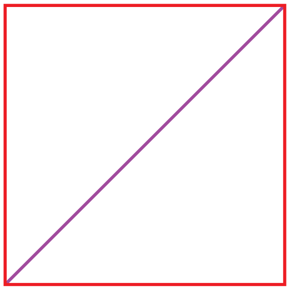
3. La base de un triángulo isósceles mide 36 cm y su altura 24 cm; ¿cuánto mide uno de sus lados iguales?

4. Calcula la altura de una pared donde ha sido recargada una escalera de 6 m de largo que llega hasta lo alto de ésta. Se sabe que la distancia entre la escalera y la pared es de 1.90 m.

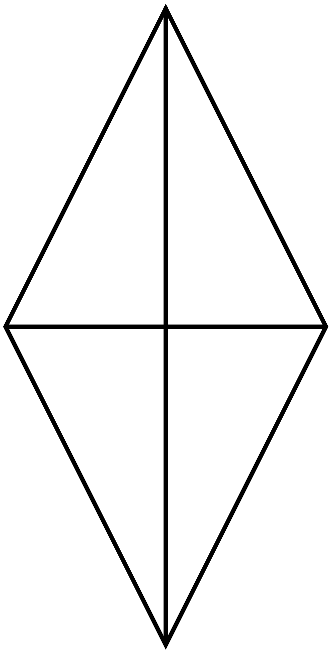
5. Halla la diagonal de un hexágono regular cuyo lado mide 2.8 cm

6. Calcula la altura de un triángulo isósceles cuyos lados iguales miden 4.8 y el otro lado mide 3.6.

7. En un edificio se protegieron 120 ventanas cuadradas de 1.25 m de lado, **con una con adhesiva.** ¿Cuántos metros de utilizaron?



8. Encontrar el valor del lado del rombo cuyas diagonales miden 16 cm y 12 cm.



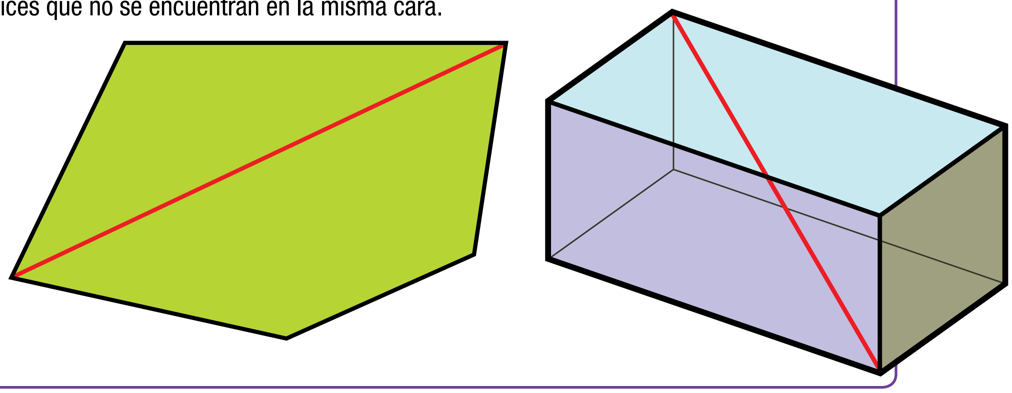
Calcula el valor de la incógnita:

9. $\frac{25}{18} = \frac{f}{15}$

10. $64 = 100 - y$

Entendemos por…

Diagonal al segmento de recta que une dos vértices no adyacentes (no seguidos) de un polígono y en el caso de un poliedro, la diagonal es un segmento de recta que une dos vértices que no se encuentran en la misma cara.



Diversión matemática

Recorta 12 triángulos congruentes como el verde de la figura 1 y arma con ellos la figura 2

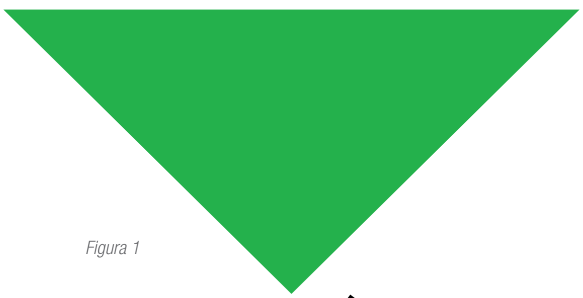


Figura 1

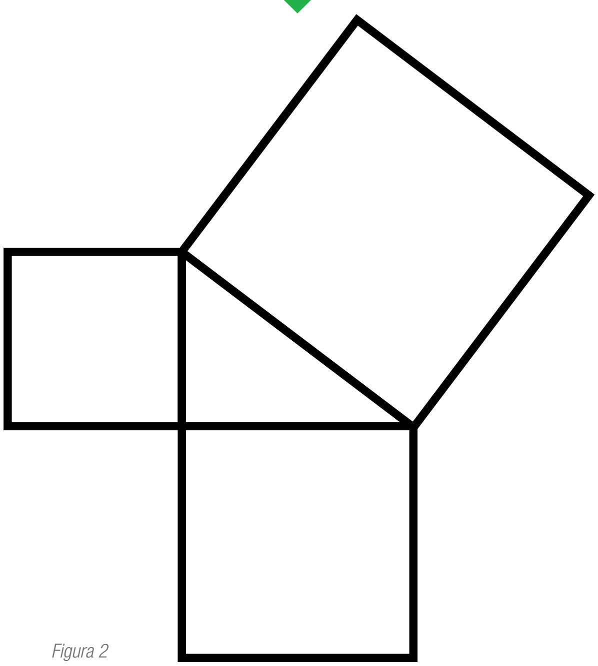


Figura 2

Día a día

Medición vertical: la plomada

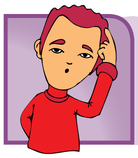
Las plomadas que se utilizaban en la antigüedad son muy parecidas a las actuales.

En esencia se trata de un objeto muy pesado, de plomo o de otro metal, con cuerpo cilíndrico rematado en un cono invertido. Lleva una cuerda ligera y flexible, que por el otro extremo acaba en un accesorio con el mismo diámetro de la plomada.

Con toda su simplicidad, la plomada es un utensilio extremadamente certero. Hace falta cierta práctica para impedir las oscilaciones y obtener lectura en pocos segundos, pero cuando te acostumbres a manejarla será tu aliada inseparable. Además de las obras de albañilería, la plomada sirve en numerosas tareas, como verificar los huecos para un armario empotrado o ensamblar estanterías de metal.

http://tutoriales-manuales.com/

Tema 2. Criterios de semejanza y congruencia



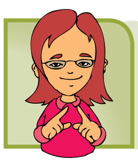
Indagación

¿Recuerdas las escalas: natural, reducida y ampliada de una figura, estudiada en los cursos anteriores?

Ahora, reunido con algunos compañeros, cada uno en su cuaderno, realice un dibujo que quiera.

Redúzcanlo a la mitad y después háganlo en tamaño triplicado.

Comenten lo que ocurrió de una construcción a la otra, por ejemplo lo



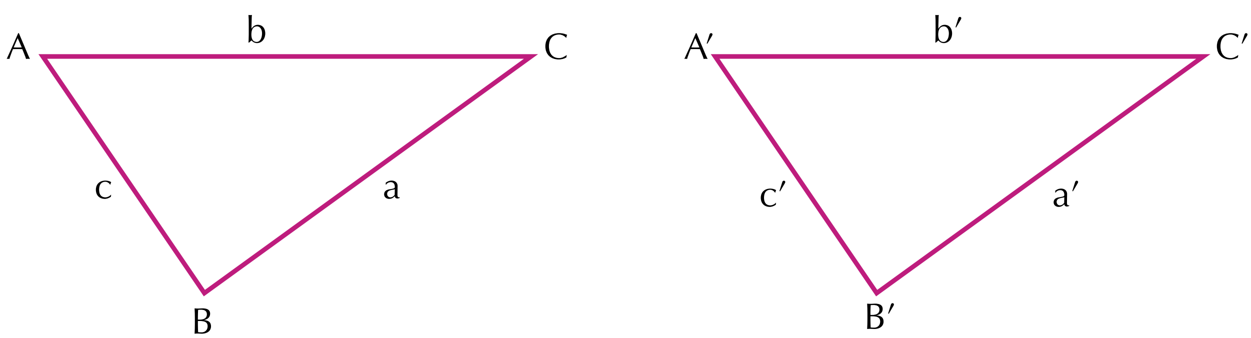
Conceptualización

ocurrido con cada parte del dibujo comparando uno con otro.

A nuestro alrededor observamos diversas formas geométricas que pueden ser iguales o diferentes entre sí. Sin embargo, ¿cuándo podemos afirmar que son semejantes?

Hemos visto en curso anterior que la semejanza se establece entre figuras que tienen la misma forma.

Ahora nos preguntamos: ¿Cuándo puedes afirmar que dos triángulos



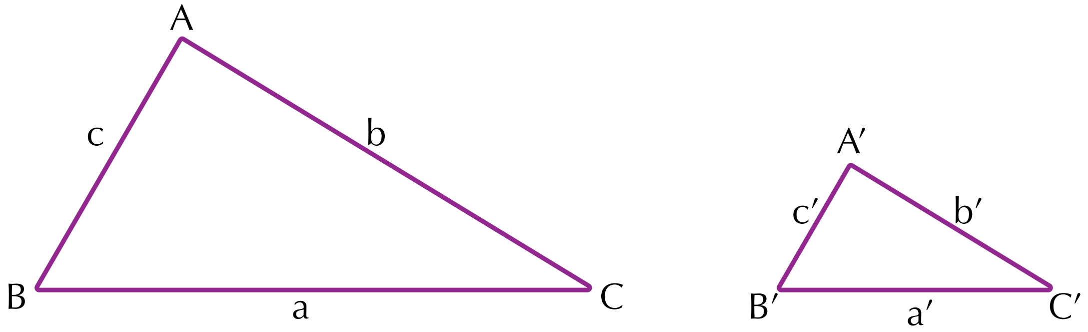
son congruentes?

¿Cómo son b y b′ ; a y a′ , y, c y c′?

Comprueba tu respuesta midiendo la longitud de los lados de los triángulos.

¿Cómo son <A y <A′, <B y B′, <C y <C′?

¿Son congruentes <ABC y <A′B′C′? ¿Por qué?



¿Cuándo puedes afirmar que dos triángulos son semejantes?

Con ayuda del transportador mide la amplitud de los ángulos: A y A´, B y B´, C y C´ y describe cómo son estos ángulos.

Usa la regla y encuentra las medidas de a, b y c, y de a′, b′, c′.

Encuentra los siguientes cocientes.

$\frac{a'}{a}, \frac{b'}{b}, \frac{c'}{c}$

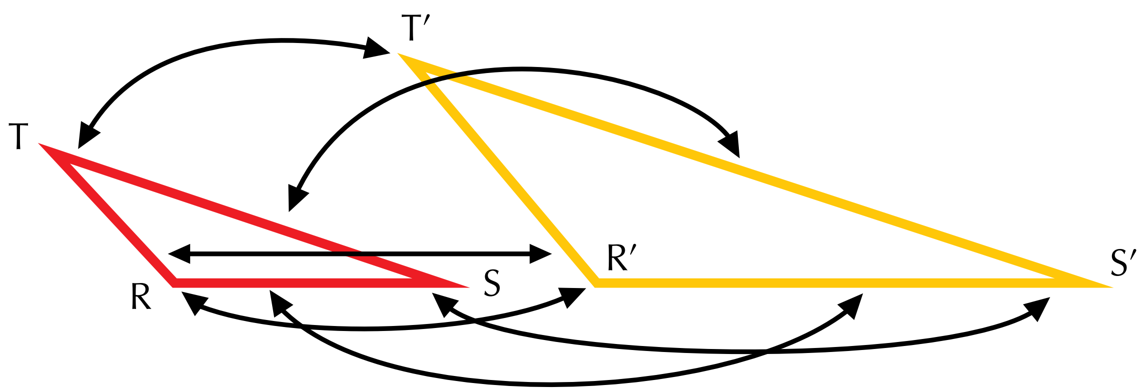
¿Qué resultado encuentras?

¿Qué podrías decir de los triángulos ABC y A´B´C´?

¿Estarás de acuerdo en definir la semejanza entre triángulos como viene a continuación?

Dos triángulos son semejantes si las amplitudes de sus ángulos son iguales uno a uno, respectivamente, y las medidas de los lados opuestos a dichos ángulos son proporcionales.

En los triángulos semejantes, los ángulos congruentes y los lados de medi-



das proporcionales reciben el nombre de homólogos.

Así, en los triángulos anteriores los ángulos R y R′ son homólogos, como lo son los ángulos S y S′, T y T′, los segmentos RS y R′S′, etcétera, esto es, hay una correspondencia uno a uno de sus ángulos y de sus lados.

Para indicar la semejanza entre dos figuras se utiliza el símbolo $\sim$

Δ RST ~ Δ R′S′T′ "el triángulo ere, ese, te es semejante al triángulo ere prima, ese prima, te prima".

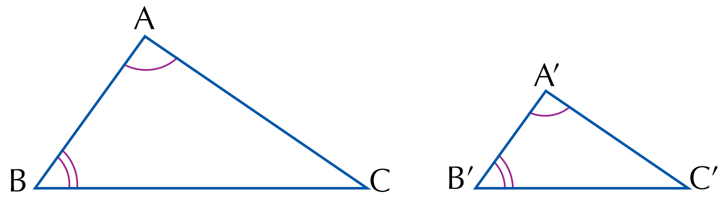
Comparte con tus compañeros las conclusiones a que has llegado.

Lee y analiza el siguiente criterio para determinar la semejanza entre dos triángulos.

Para determinar la semejanza entre dos triángulos existen tres criterios. El primero de ellos afirma lo siguiente:

Si dos ángulos de un triángulo son congruentes con dos ángulos de otro triángulo, los triángulos son semejantes.

Para justificar esta afirmación, observa los siguientes



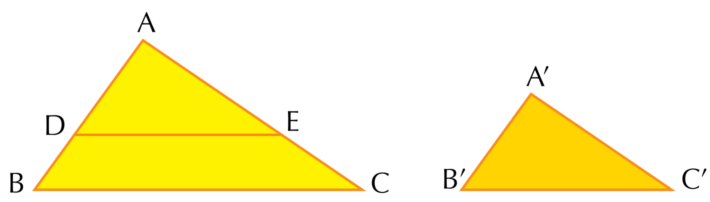
triángulos:

Se dice que:

si $\angle A \cong \angle A'$ y $\angle B \cong \angle B'$, entonces $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

Si se traslada la medida de A B′ al segmento AB desde el punto A′, se encuentra el punto D.

Desde ese punto se traza una paralela al segmento BC encontrando en AC el punto E.



Los ángulos ABC y ADE con congruentes por ser correspondientes entre paralelas, con lo que se tiene que:

$\angle A \cong \angle A'$

$\overline{AD} \cong \overline{AD}$

y $\angle ADE \cong \angle ABC \cong \angle A'B'C'$

Por lo tanto: $\triangle ADE \sim \triangle A'B'C'$

Entonces: $\angle ADE \cong \angle C'$

Pero como los tres ángulos del triángulo ABC son congruentes con los ángulos del triángulo y por definición de semejanza

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C',$$

pues tienen tres ángulos correspondientes congruentes.

Por el teorema de Tales sabemos que una recta paralela a uno de sus lados determina segmentos cuyas medidas son proporcionales, por lo que:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{CB}{C'B'}$$

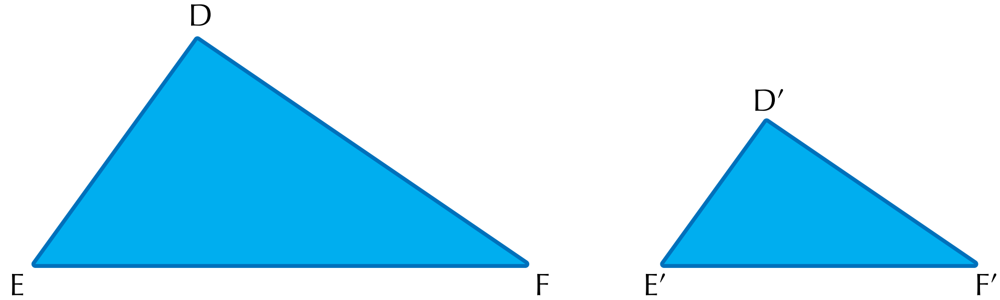
De donde se afirma que dos triángulos son semejantes si tienen dos ángulos congruentes.

Semejanza de triángulos

El ser humano ha creado diversos mecanismos para obtener la medida de distancias inaccesibles o para construir objetos a escala; uno de ellos es a través de figuras semejantes.

Dos triángulos son semejantes si tienen un ángulo congruente y las longitudes de los lados que forman estos ángulos son respectivamente proporcionales.

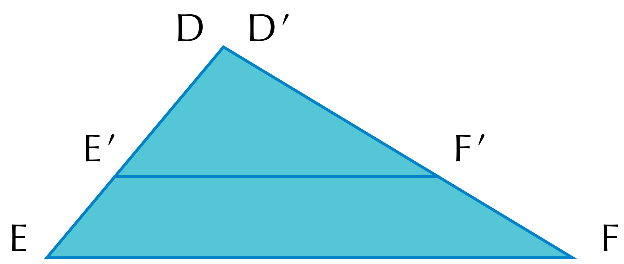
De las figuras siguientes:



Se afirma que $<D \cong <D'$ y $\frac{D'E'}{DE} = \frac{D'F'}{DF}$ por lo que $\triangle EDF \sim \triangle E'D'F'$.

Para demostrar lo anterior, haz las construcciones en tu cuaderno:

Traslada la medida del D E ′ sobre DE y la de D F ′ sobre DF de tal manera que el ángulo D′ coincida con D, pues se sabe que son ángulos congruentes.



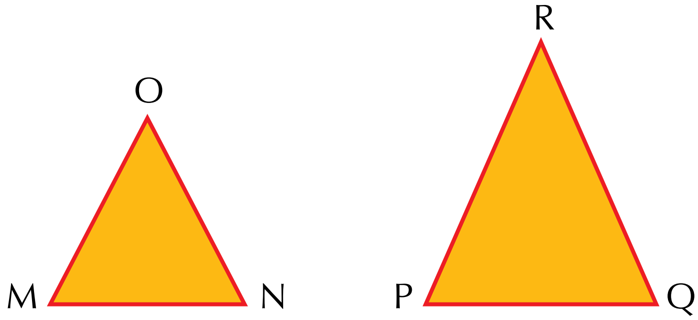
Como también se sabe que $\frac{D'E'}{DE} = \frac{D'F'}{DF}$, se concluye que $\overline{E'F'}$ es paralela a $\overline{EF}$ por el teorema de Tales.

Por lo tanto: $<E \cong <E'$ y $<F \cong <F'$

Con lo cual los tres ángulos del $\triangle$ DEF son congruentes uno a uno con los ángulos del $\triangle$ D′E′F′, y como en el primer criterio de congruencia se establece que con dos ángulos iguales los triángulos son semejantes, de lo anterior se concluye que:

$$\triangle DEF \sim \triangle D'E'F'$$

Reúnete en equipo, observa los triángulos siguientes y anota tus conclusiones.



Podrías afirmar, a simple vista, que los triángulos anteriores son semejantes? ¿Porqué?

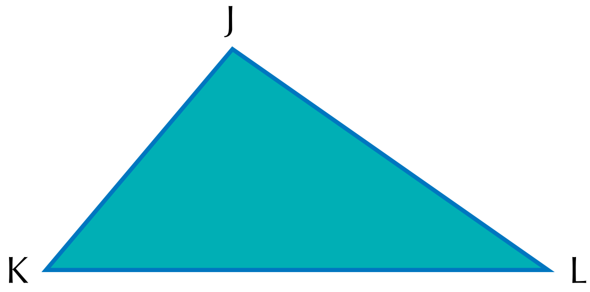
Mide los segmentos MO, MN; PQ y PR. También mide los ángulos M y P.

Encuentra las razones $\frac{MO}{PR}$ y $\frac{MN}{PQ}$

¿Cómo son estos cocientes?
¿Cómo son los ángulos respectivos que forman estos segmentos?
¿Qué se puede decir de los triángulos?
Comparte tus respuestas con tus compañeros.

Con un compañero, traza un triángulo J'K'L semejante al siguiente con una razón de semejanza de $\frac{2}{5}$. Para ello, te sugerimos pasos a seguir:

Mide los segmentos KL y LJ, también mide el ángulo L.



- Como conoces la razón de semejanza, sabes a qué es igual cada una de las siguientes razones, escríbelas.

$\frac{K'L'}{KL} = \frac{L'J'}{LJ} =$

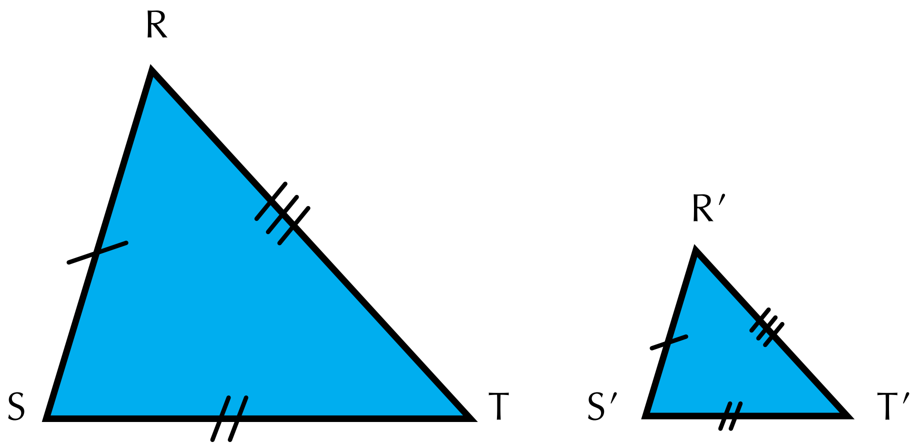
Como conoces las longitudes de KL y LJ, usa las anteriores igualdades para hallar las longitudes de K'L' y L'J'.

- Con las medidas anteriores y la medida del ángulo L, construye el triángulo semejante correspondiente.
Compara tu construcción con la que han hecho tus compañeros.

Un método que se ha utilizado para estimar la distancia de un lugar determinado a otros, a veces inaccesibles, es por medio de triángulos semejantes.

Si las longitudes de los lados correspondientes de dos triángulos son proporcionales, entonces, los triángulos son semejantes.

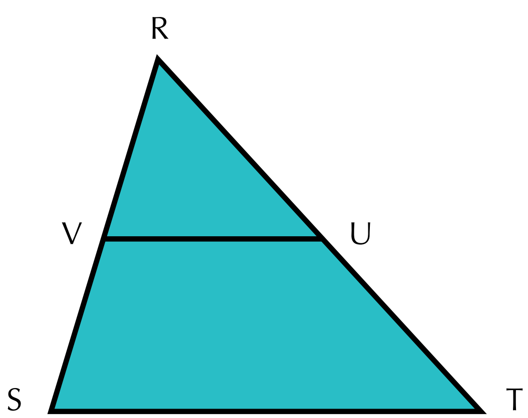
Observemos los siguientes triángulos.



De acuerdo con el tercer criterio se afirma que: $\frac{R'S'}{RS} = \frac{S'T'}{ST} = \frac{T'R'}{TR}$ por lo que $\triangle RST \sim \triangle R'S'T'$.

Para justificar el criterio anterior, se traslada R T ′ a RST sobre RT, localizando el punto U, y se traza sobre ese punto una paralela VU a ST.

Por el teorema de Tales, se afirma que:



$\triangle RUV \sim \triangle RST$.

Puesto que VU es paralela a ST .

De acuerdo con los trazos realizados, se tiene que:

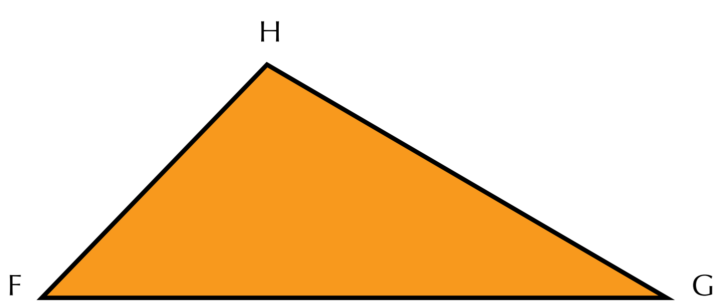
$$\frac{RS}{RV} = \frac{ST}{UV} = \frac{RT}{RU}$$

En la primera afirmación se tiene: $\frac{RS}{R'S'} = \frac{ST}{S'T'} = \frac{RT}{R'T'}$

Pero como RU = R′ T′, las dos últimas razones son equivalentes; por lo tanto, las demás igualdades se cumplen en ambos triángulos, con lo que se establece que:

$$\boxed{\triangle RST \sim \triangle R'S'T'}$$

Con tus compañeros, es posible construir un triángulo semejante a otro, si se conoce la razón de semejanza o constante de proporcionalidad; supone que la constante es $\frac{2}{3}$ y que el triángulo dado es el $\triangle$ FGH. Construye el $\triangle$ F′G′H′.



Calcula, cada una de las siguientes razones $\frac{F'G'}{FG}$, $\frac{G'H'}{GH}$, $\frac{H'F'}{HF}$

Sustituye en cada una de las razones las medidas de los segmentos FG, GH y HF.

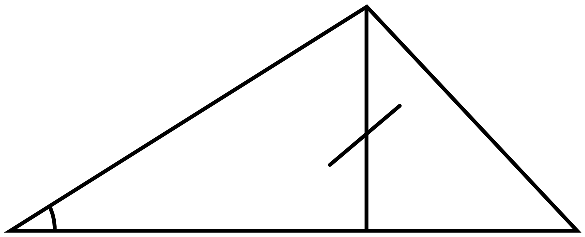
- Calcula las medidas de: $F\,G\,'$, $G\,H\,'$, $H\,F\,'$
- Con las medidas anteriores construye el triángulo correspondiente, semejante al $\triangle$ FGH.

Media proporcional

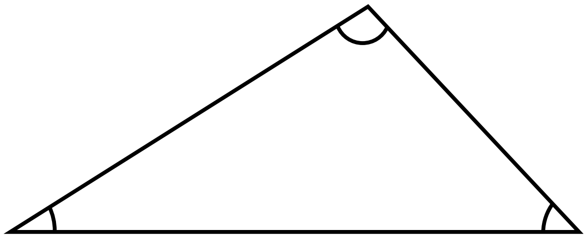
Construcción de la media proporcional

Con tu grupo de trabajo realiza el siguiente taller, el cual te permitirá conocer un caso muy interesante de semejanza de triángulos.

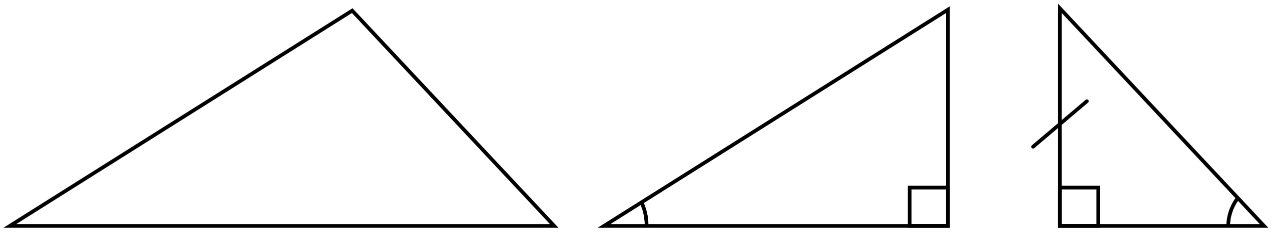
1. Dibuja un triángulo rectángulo y recórtalo.



2. Dibuja de nuevo el triángulo, traza la altura sobre la hipotenusa y recorta los dos triángulos que resultan de esta construcción.

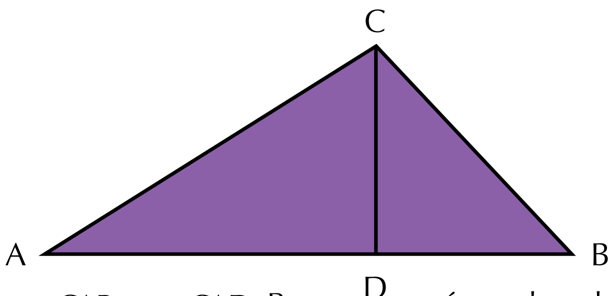


Ahora se tienen tres triángulos: el original y los dos que resultan al cortar por la altura sobre la hipotenusa.



Compara los ángulos de estos tres triángulos.
¿Qué observas? ¿Qué puedes decir de triángulos cuyos ángulos son congruentes?
¿Qué puedes decir de estos tres triángulos?

3. Ahora analiza por qué dos de ellos tienen sus ángulos congruentes.
Por ejemplo el triángulo ABC y el triángulo ACD.



< CAB ≅ < CAD Por ser común a los dos triángulos.

< ACB ≅ < ADC Son ángulos rectos.

¿Por qué < ABC ≅ < ACD?

Si comparas, ahora los ángulos del △ ABC con los ángulos del △ CDB.

¿Cómo son △ ABC y △ CBD? ¿Por qué?
¿Cómo son △ ACB y △ CDB? ¿Por qué?
¿Cómo son △ BAC y △ DCB? ¿Por qué?

Seguramente ya has llegado a la conclusión de que los tres triángulos son semejantes.

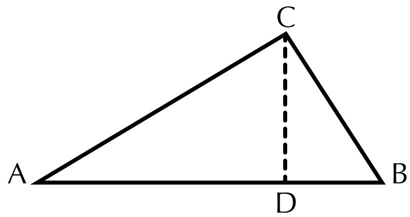
Busca ahora los lados homólogos que te permiten encontrar la razón de semejanza entre ellos.

La semejanza entre △ ABC y △ ADC permite encontrar la igualdad entre razones de lados homólogos así: $\frac{AB}{AC} = \frac{CB}{CD} = \frac{AC}{AD}$ de la relación de semejanza entre △ ABC y △ ACB se tiene: $\frac{AB}{CB} = \frac{CB}{DB} = \frac{AC}{CD}$

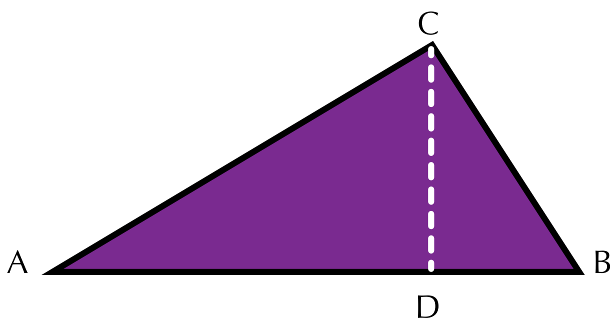
Encuentra la igualdad de las razones entre los lados homólogos de △ ACD y △ CDB.

De lo anterior podemos concluir el siguiente teorema de semejanza:

La altura sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo divide a éste en dos triángulos semejantes a él y semejantes entre sí.



4. En el triángulo rectángulo ABC hemos trazado la altura CD, sobre la hipotenusa.



Los triángulos ABC y ACD tienen en común el ángulo A y ya viste que son triángulos semejantes. La igualdad de razones entre lados homólogos que forman el ángulo A se expresa así:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD} \text{ ó } \frac{AD}{AC} = \frac{AD}{AC}$$

¿Qué observas en las dos proporciones que se establecen entre razones de lados homólogos? ¿Cómo son los medios en la primera proporción? ¿Cómo los extremos en la segunda?

Conclusión: En un triángulo rectángulo, un cateto es media proporcional entre la hipotenusa y la proyección del cateto sobre la hipotenusa.

En nuestro caso la hipotenusa es AB, el cateto considerado es AC y la proyección de AC sobre la hipotenusa es AD.

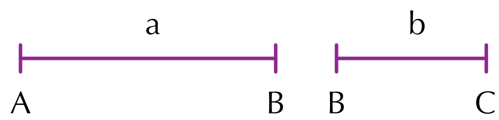
Si se considera el cateto CB, ¿cómo escribirías la proporción entre los lados homólogos de los triángulos ABC y CBD, que tienen en común el < B?

Comenta tus conclusiones con tus compañeros.

Analicemos la situación siguiente:

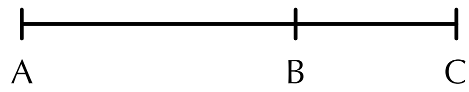
Encontremos la longitud del segmento que representa la media proporcional de segmentos cuyas medidas se conocen.

Con tus instrumentos y siguiendo las instrucciones, realiza este proceso en tu cuaderno.

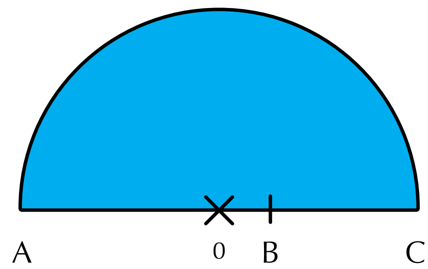


Dados: a = 3 cm y b = 2 cm, un procedimiento a seguir es el siguiente:

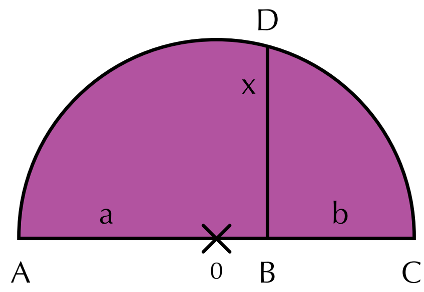
Se trazan los segmentos, AB y BC en forma consecutiva.



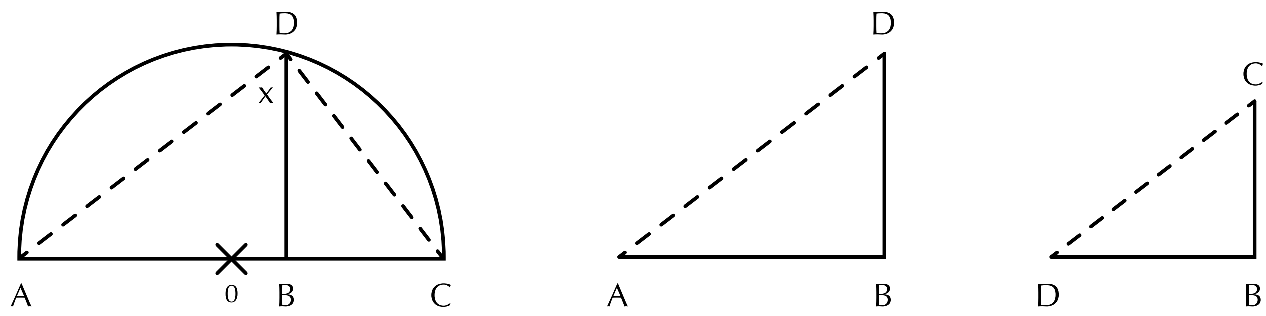
Se localiza el punto medio O de AC y después con el compás, se traza una semicircunferencia cuyo radio sea igual a AO



Se traza una perpendicular a AC a partir de B, de manera que corte a la semicircunferencia formándose el segmento BD, que representa la media proporcional buscada.



Si se unen A con el punto D y C con el punto D, se obtienen dos triángulos semejantes con base en el teorema de semejanza que ya conoces; los triángulos son: △ ABD y △ BCD



En la figura se observa que: AB es homólogo de BD y BD es homólogo de BC.

Por tanto, la proporción que se forma es:

$$\frac{AB}{BD} = \frac{BD}{BC}$$

De aquí, el término común es: BD mide 2.4 cm.

Este resultado lo puedes comprobar:

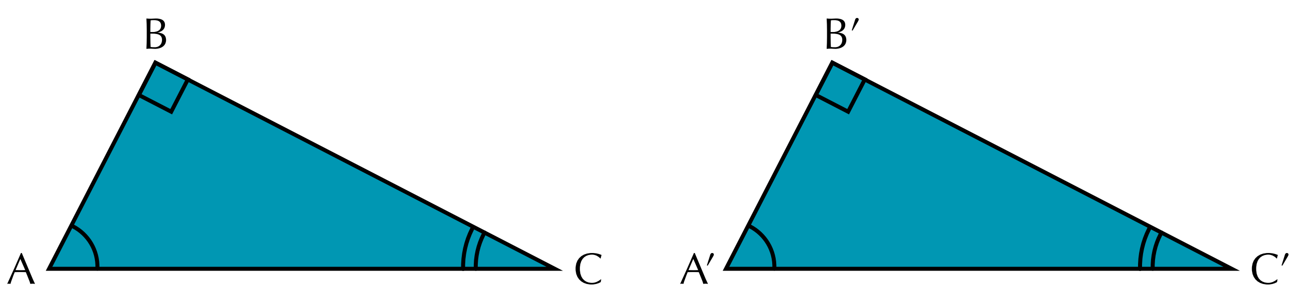
En la proporción establecida reemplaza la medida de los segmentos dados.

Congruencia de triángulos

Analicemos el criterio LLL: Al observar ciertas figuras se advierte que éstas quizá tengan la misma forma, pero no el mismo tamaño o medida; otras tal vez sean de la misma forma y el mismo tamaño, lo cual puede interpretarse de diferentes maneras.

Las figuras que tienen la misma forma y la misma medida se dice que son congruentes.

Observemos el siguiente ejemplo:



Al analizar los dos triángulos se puede ver que si se miden los lados del $\triangle$ABC y los del $\triangle$A′B′C′, resultarán congruentes, lo cual se representa de la siguiente forma:

$$\overline{AB} = \overline{A'B'} \qquad \overline{AC} = \overline{A'C'} \qquad \overline{BC} = \overline{B'C'}$$

Asimismo, se tiene que los ángulos A y A′, B y B′ así como C y C′ son congruentes, lo cual se representa así:

$$\angle A \cong \angle A' \qquad \angle B \cong \angle B' \qquad \angle C \cong \angle C'$$

Debido a que los lados y ángulos interiores de estos triángulos son congruentes, se dice que el $\triangle$ABC es congruente con el $\triangle$A′B′C′; lo cual se representa como: $\triangle ABC \cong A'B'C'$

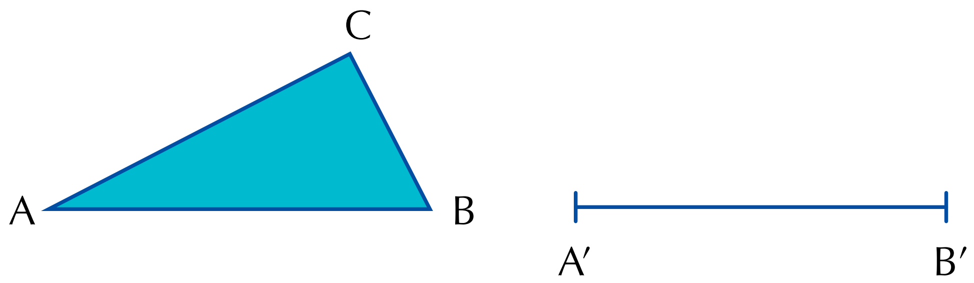
Cuando se cumplen estas condiciones se dice que dos triángulos son congruentes, si tienen respectivamente congruentes sus lados y sus ángulos, ya que existe una correspondencia uno a uno entre sus lados y ángulos.

Así, expresamos el criterio LLL:

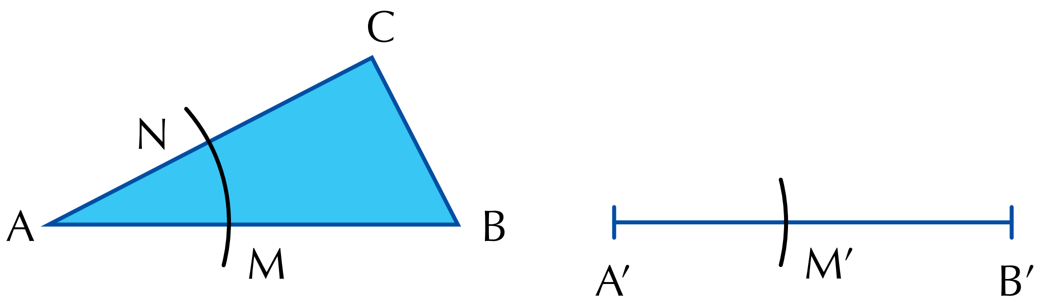
Si dos triángulos tienen sus tres lados congruentes, los dos triángulos son congruentes.

Ahora, estudiemos el criterio LAL.

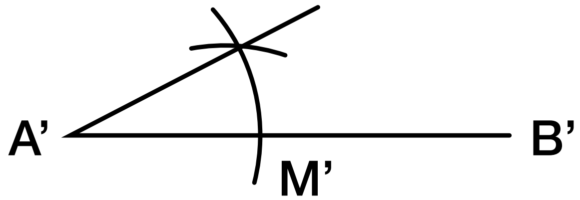
Dado el △ABC, obtenemos otro triángulo congruente a él, tomando como referencia el ángulo ∠ A. Para ello se traza un segmento A′B′ congruente al segmento AB.



Con una abertura cualquiera del compás se trazan dos arcos haciendo centro en A y A′ con lo que se obtienen los puntos M, N y M′.

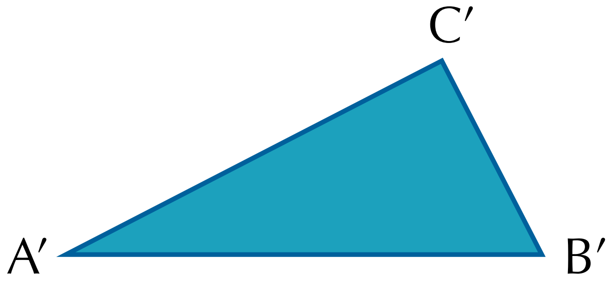


Con centro en M′ y con una abertura de compás congruente con el arco MN, se traza otro arco que interseque al del A′B′ y después se une este punto con el extremo A′.



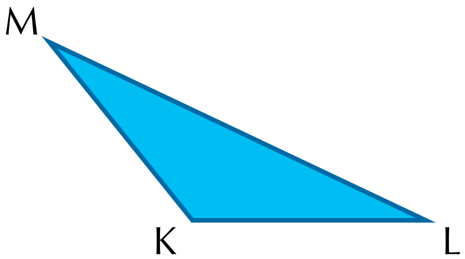
Se hace centro en A′ y con una abertura de compás congruente a AC se marca el punto C′.

Se unen C′ con B′ para formar el △A′B′C′, el cual resulta ser congruente con el △ABC.

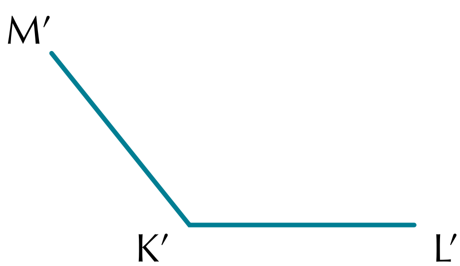


Otro procedimiento para trazar triángulos congruentes es el siguiente:

Dado el triángulo KLM, se traza un segmento K'L' congruente al segmento KL.

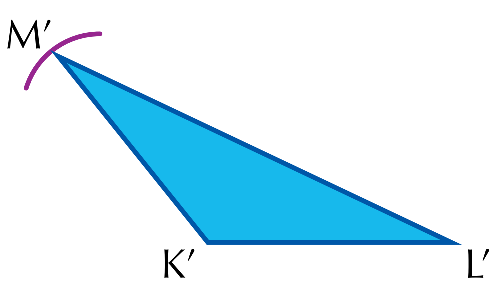


Se mide con transportador el ∠ K y se traza el ∠ K'.



Se hace centro en K' y con una abertura de compás congruente a K M se marca el punto M'.

Después se unen los puntos L' y M' para formar el triángulo K'L'M', que resulta congruente con el △ KLM.



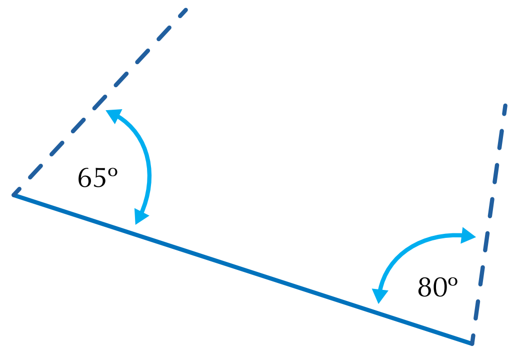
Con base en estos dos procedimientos mostrados se tiene que:

Dos triángulos son congruentes si tienen congruentes un ángulo y los lados que forman dicho ángulo.

Un nuevo criterio de congruencia de triángulos es el criterio ALA.

Como ya has visto, para trazar un triángulo congruente a otro no se necesita conocer las medidas de los lados y ángulos. Para ello es suficiente conocer dos ángulos y el lado comprendido entre ellos o también las medidas de sus tres lados.

Puedes hacer una comprobación haciendo construcciones con los datos de la figura:



¿Resultan los triángulos construidos a partir de estos datos, congruentes?

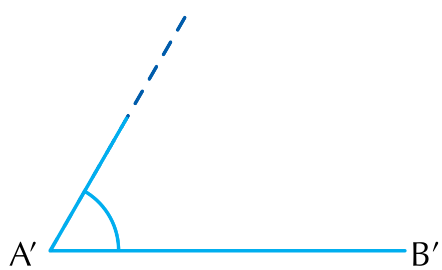
¿Crees que este es otro criterio para la congruencia de triángulos?

Con tus dos compañeros, analiza el siguiente procedimiento para trazar triángulos congruentes, realizando este taller en clase:

Dada la longitud de un lado y las medidas de dos ángulos adyacentes.

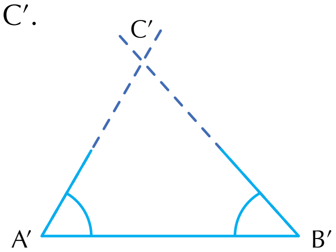
1. Se traza el segmento $\overline{A'B'}$ tal que $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$

2. Se mide con el transportador el ∠ A y se traza ∠ A' de modo que ∠A ≅ ∠A'.



3. Se mide ∠ B y se traza ∠ B' tal que ∠B ≅ ∠B'.

4. Se prolongan los rayos que parten de A′ y B′ hasta que se corten; ese punto de intersecciónrepresenta a C′.



Así se obtiene el $\triangle A'B'C'$.
Comparando los triángulos ABC y A′B′C′, se tiene que:

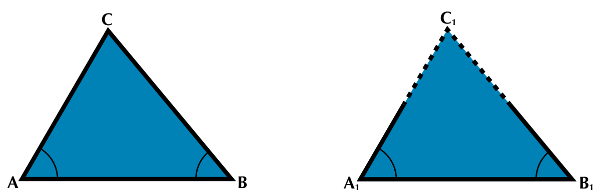
$$\measuredangle A \cong \measuredangle A', \ \overline{AB} \cong \overline{A'B'}, \ \measuredangle B \cong \measuredangle B'$$

Al medir los lados y los ángulos restantes se tiene que:

$$\measuredangle C \cong \measuredangle C', \ \overline{AC} \cong \overline{A'C'}, \text{ y } \overline{BC} \cong \overline{B'C'}$$

Por lo tanto, el $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

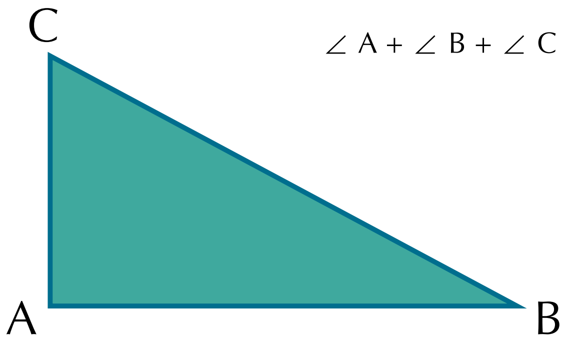
Así, se tiene que:



Dos triángulos son congruentes si tienen un lado congruente adyacente a dos ángulos congruentes.

Propiedades de los triángulos

Haz grupo con dos compañeros y dibujen un triángulo cualquiera. Luego midan cada uno de los ángulos y obtengan la suma de los ángulos internos.



$$\angle A + \angle B + \angle C = ?$$

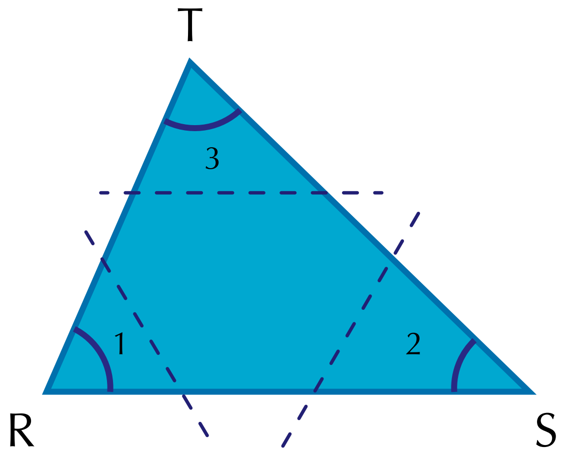
¿Cómo son estos resultados en cada caso?

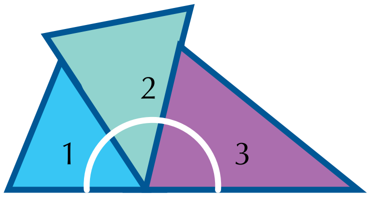
¿Depende la forma y el tamaño del triángulo de la medida de sus ángulos internos o interiores?

¿Hay algún modelo de estos triángulos que tenga dos ángulos rectos?

Se sabe que todo triángulo tiene tres ángulos internos o interiores, pero ¿cuánto suman las medidas de éstos?

Si se recorta un triángulo en tres partes, de modo que cada una contenga un ángulo interno o interior, y se suman haciendo coincidir los vértices, resulta la figura siguiente.





Compruébenlo con alguno de los modelos que han hecho.

Nótese que al unir los tres ángulos forman un ángulo llano; es decir, un ángulo de 180°.

Por consiguiente, la suma de los ángulos internos del triángulo RST es 180°.

Ahora se plantea la siguiente interrogante: ¿se cumple esa condición en todo triángulo?

Para contestarla es necesario realizar una demostración que generalice esta propiedad como la siguiente:

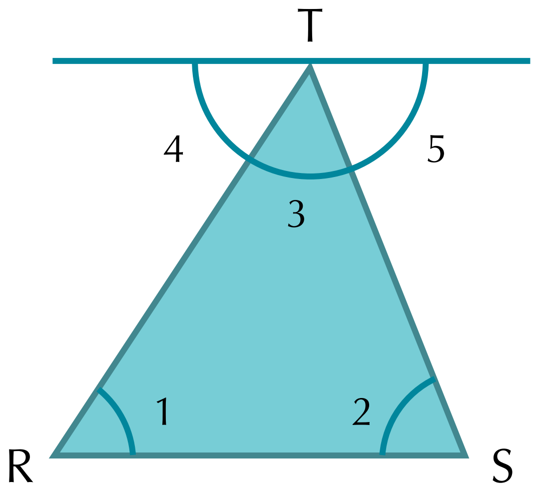
En el $\triangle$ RST: Se conoce que los ángulos 1, 2 y 3 son internos o interiores. Se desea demostrar que en el triángulo RST:

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°.$$

Se conoce que los ángulos 1, 2, 3 son ángulos internos del triángulo RST y se desea demostrar que

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°.$$

Para esta demostración se necesita trazar una paralela al lado RS que pase por el vértice T; con ello se forman los ángulos 4 y 5.

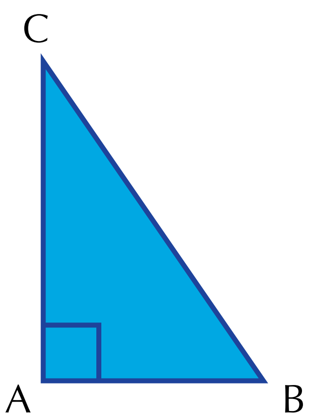


Razonamiento	
Afirmaciones	**Razones**
1. $\measuredangle 4 + \measuredangle 3 + \measuredangle 5 = 180º$	1. Porque forman un ángulo colineal o llano.
2. $\measuredangle 1 = \measuredangle 4$ y $\measuredangle 2 = \measuredangle 5$	2. Porque son ángulos alternos internos entre paralelas.
3. $\measuredangle 1 + \measuredangle 2 + \measuredangle 3 = 180º$	3. Al sustituir en la afirmación a $\measuredangle 4$ y $\measuredangle 5$ por sus equivalentes ($\measuredangle 1$ y $\measuredangle 3$).

En general: La suma de los ángulos internos de cualquier triángulo es igual a 180°.

De la afirmación anterior se pueden inferir (deducir):

a. Los ángulos agudos de un triángulo rectángulo suman 90º; es decir, son complementarios.



(Recordemos: los ángulos suplementarios son los que suman 180°).

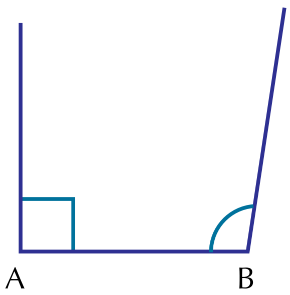
$\angle$ A es recto = 90°.

$\angle$ B y $\angle$ C son agudos.

$\angle$ B + $\angle$ C = 90°.

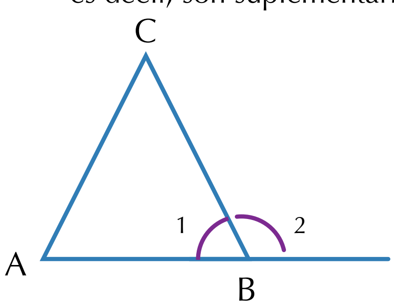
Compruébenlo para el caso de una de sus escuadras.

b. Un triángulo sólo puede tener un ángulo recto o un ángulo obtuso.



Los lados de los ángulos rectos u obtusos no se intersecan, por tanto no se forma un triángulo.

c. En un triángulo, un ángulo interno y su externo adyacente suman 180°; es decir, son suplementarios.

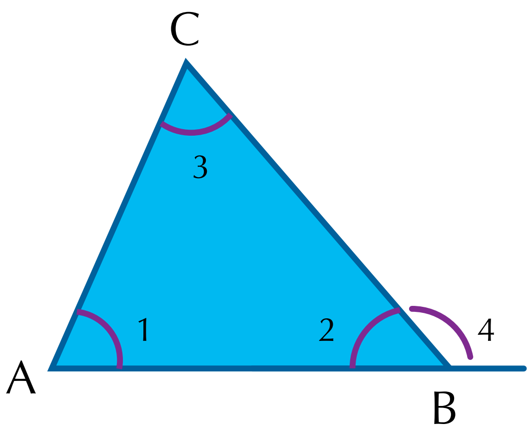


$\angle$ 1 es interno del $\triangle$ABC.
$\angle$ 2 es externo adyacente de $\angle$ 1.
$\angle$ 1 + $\angle$ 2 = 180°.

d. Todo ángulo externo de un triángulo es igual a la suma de los dos internos no adyacentes a él.

Los ángulos 1 y 3 son internos no adyacentes al ángulo externo 4.

$$\angle 4 = \angle 1 + \angle 3$$



e. En todo triángulo, cualquier ángulo externo es mayor que un ángulo interno no adyacente a él.

$\angle 1$ y $\angle 3$ son internos no adyacentes al ángulo externo 4.

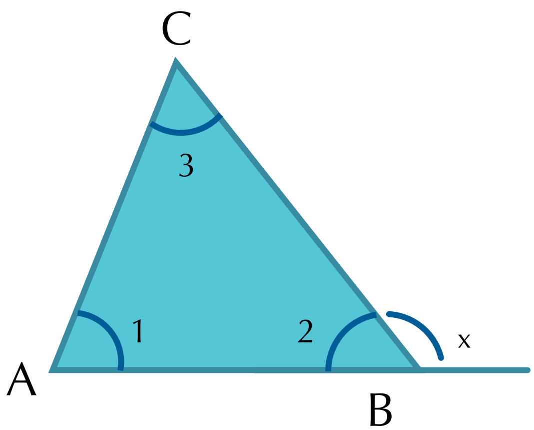
$$\angle 4 > \angle 1 \quad \text{y} \quad \angle 4 > \angle 3$$

Continúa trabajando en equipo para escribir las razones de cada afirmación lo que permite construir una demostración:

Se conoce que: $\angle 1$, $\angle 2$ y $\angle 3$ son los ángulos internos del $\triangle$ ABC.

$\angle 1$ es externo adyacente de $\angle 2$.

Se quiere demostrar que $\angle x = \angle 1 + \angle 2$



Se conoce que: $\angle 1$, $\angle 2$ y $\angle 3$ son los ángulos internos en el $\triangle$ABC.

Se quiere demostrar que: $\angle x = \angle 1 + \angle 3$

$\angle x$ es externo adyacente al $\angle 2$.

Razonamiento:

¿Cuál es la razón para afirmar que $\angle x + \angle 2 = 180º$?

¿Por qué puede afirmarse que $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180º$?

¿Por qué se puede decir que $\angle x + \angle 2 = \angle 1 + \angle 2 + \angle 3$

¿Por qué se puede plantear la siguiente igualdad? $\angle x + \angle 2 - \angle 2 = \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 - \angle 2$?

Cómo explicas entonces que $\angle x = \angle 1 + \angle 3$

Por lo tanto se cumple que:

En un triángulo, un ángulo externo x es igual a la suma de los dos ángulos internos no adyacentes a él.

Verifica las siguientes propiedades de los triángulos, realizando una construcción con medidas.

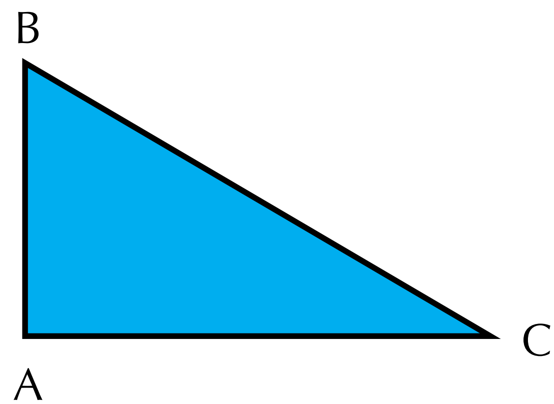
1. Los ángulos opuestos a los lados congruentes de un triángulo isósceles son iguales.
2. En todo triángulo escaleno el mayor lado se opone al mayor ángulo.
3. En todo triángulo, triángulo la longitud de uno de sus lados es menor que la suma de las longitudes de los otros dos lados y que a su vez la longitud de su lado es mayor que la diferencia entre las longitudes de los otros dos lados.
4. En todo triángulo se cumple que cualquier lado es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia.

Aplicación

Copia y resuelve los ejercicios, en tu tu cuaderno y después compara con algunos compañeros.

1. Construye un triángulo semejante al triángulo ABC siguiendo los pasos señalados.

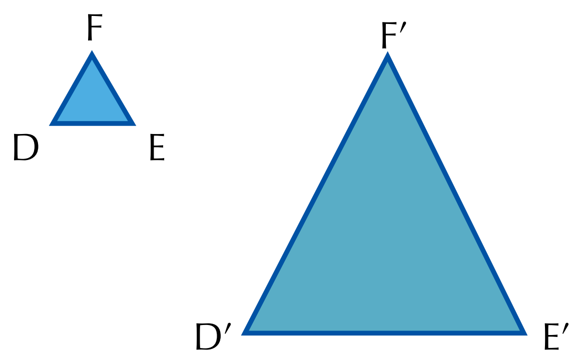
    a. Traza un ángulo congruente con < A y denótalo como A′.
    b. Marca un segmento A B ′ ′ de una medida cualquiera.
    c. Sobre B′ traslada la medida de < B.
    d. Cierra el triángulo y encuentra el ángulo C.
    e. ¿Serán semejantes los triángulos ABC y A′B′C′? ¿Por qué?
    f. ¿Qué se requiere para afirmar que dos triángulos son semejantes



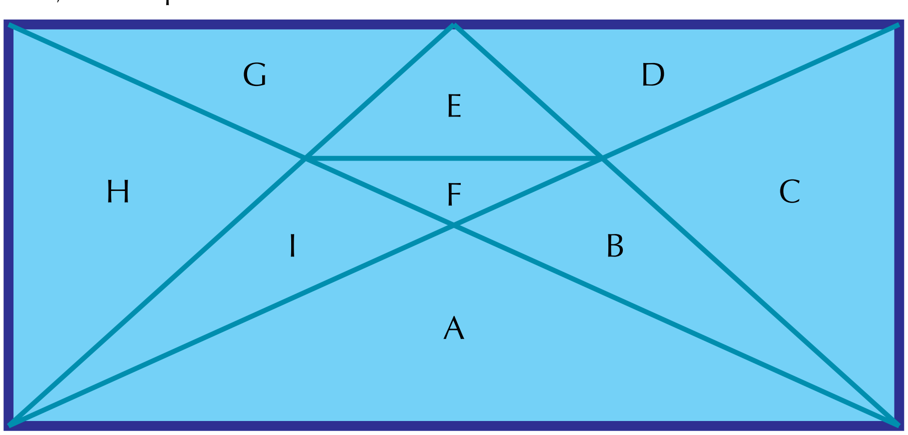
2. Si se sabe que en los triángulos siguientes:

    DE = 2 cm, EF = 2.5 cm, D′E′ = 6 cm, E′F′ = 7.5 cm, $\angle E = 65°$ y $\angle E' = 65°$

    Determina si los triángulos son semejantes. Justifica tu respuesta.

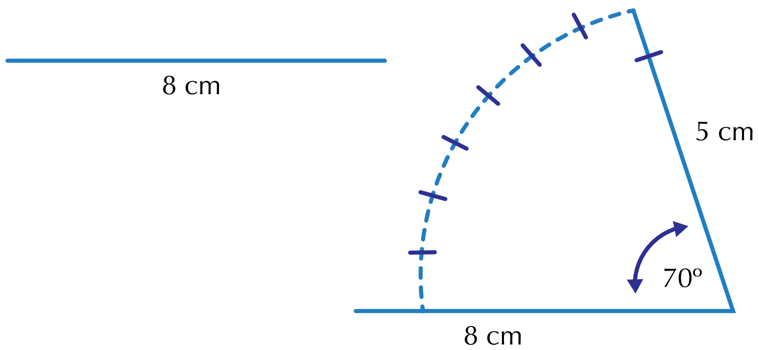


3. En la siguiente figura indica los triángulos que sean congruentes; para ello, tienes que medirlos.



4. Dibuja, en una hoja, un triángulo en el que dos de sus lados midan 5 cm y 8 cm respectivamente, y el ángulo entre ellos mida 70°.
   Para el procedimiento las indicaciones pueden ser las siguientes:

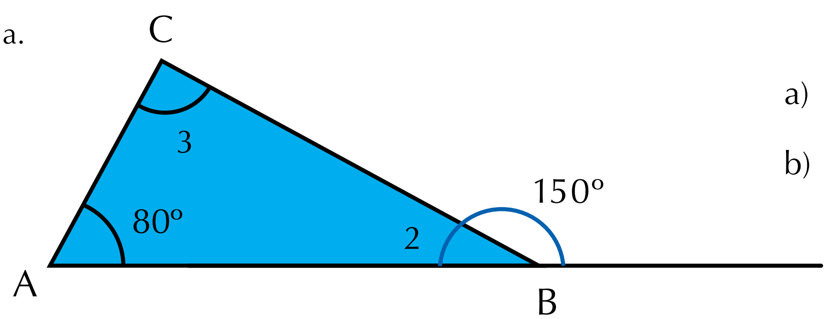
   a. Traza un segmento de 8 cm.
   b. Señala un ángulo de 70° con vértice en uno de los extremos del segmento de 8 cm.
   c. Traza el segmento con abertura de 70°. Sobre él traza el lado de 5 cm.



   Completa el triángulo trazando el tercer lado.
   Recorta el modelo que has construido.
   Mide el tercer lado y escribe su valor.
   Compara esa medida en los modelos que han construido tus compañeros y coméntalo.

5. Dadas las siguientes figuras, encuentra las medidas de los ángulos que se piden.

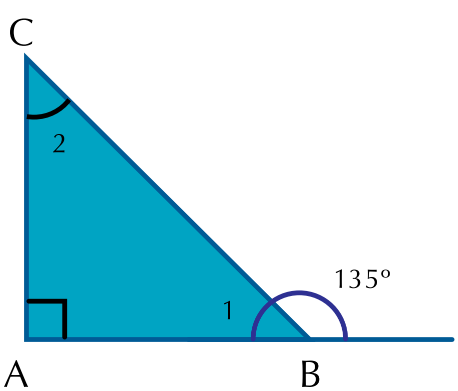
   a.



   a) ∢ 2 =

   b) ∢ 3 =

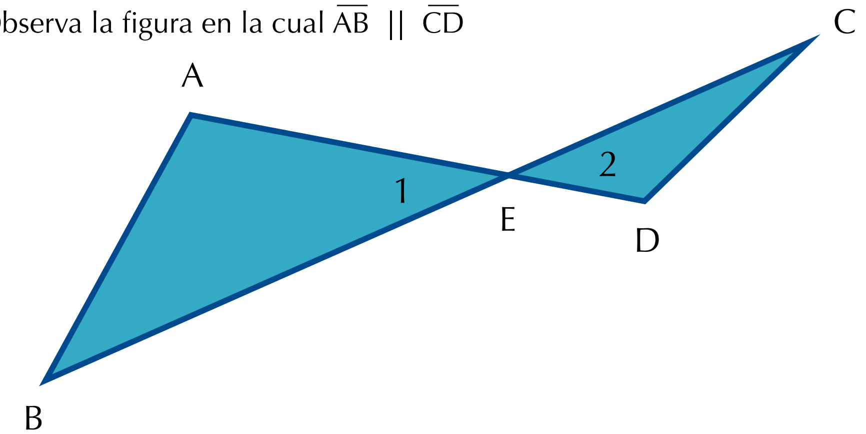
   b.



   c) ∢ 2 =

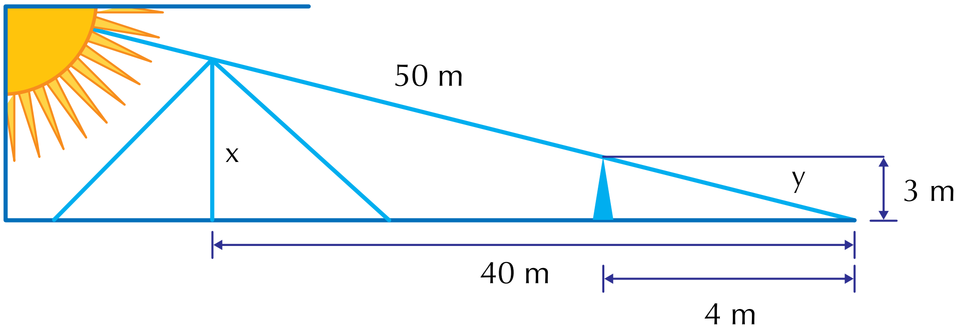
   d) ∢ 1 =

6. Observa la figura en la cual $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

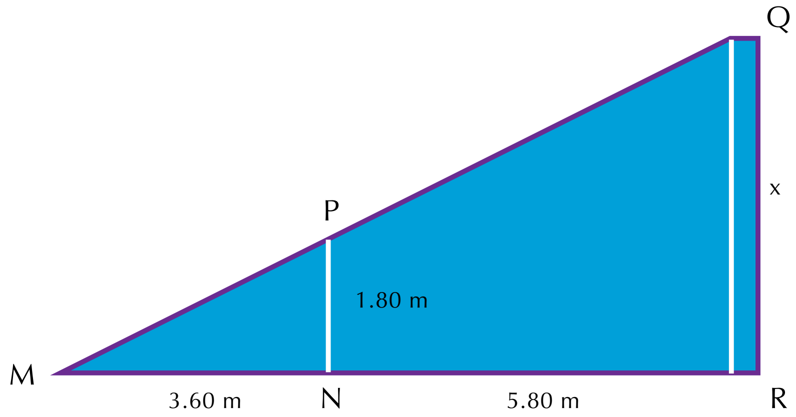


a. ¿Cómo son los ángulos 1 y 2? ¿Por qué?
b. ¿Cómo son los ángulos A y D? ¿Por qué?
c. ¿Cómo son AE y ED? ¿Por qué?
d. ¿Cómo son el $\triangle$ ABE y el $\triangle$ CDE? ¿Por qué?

7. Lucía quiso medir la altura de una pirámide, así que colocó una estaca de 3 m de altura y midió la sombra que proyectaban la pirámide y la estaca. En el dibujo encontrarás los datos.



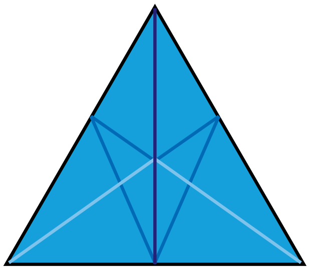
8. Calcula la altura del poste de luz representado en la figura



9. Construye tres triángulos escalenos que sean semejantes y explica sus características de semejanza.
10. Revisa cada uno de los criterios de semejanza y construye dos triángulos congruentes para cada criterio.

Diversión matemática

Juega buscando los 32 triángulos. que hay en la figura.



Entendemos por…

Congruencia la característica de dos figuras tal que tienen el mismo tamaño y la misma forma. Al superponerlas coinciden totalmente.

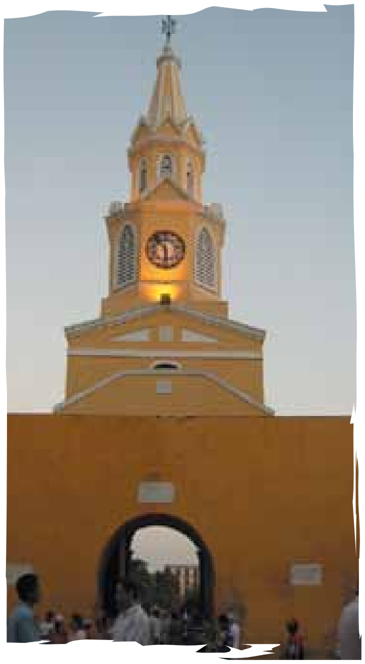
Día a día

Torre del Reloj

La torre del reloj fue construida como la entrada principal a la ciudad amurallada de Cartagena.
Actualmente consta de tres puertas. Sin embargo, en un principio fue sólo una y los espacios laterales servían de sala de armas y capilla.
Esta torre se encuentra construida sobre un lienzo de muralla, con una altura de 30 metros. y constituye uno de los símbolos arquitectónicos más conocidos de Colombia.
Esta construcción se encuentra ubicada entre las plazas de los coches y de la paz, y ha sido testigo de los grandes cambios tanto físicos como sociales que ha sufrido la ciudad desde hace casi cinco siglos; siendo en sus orígenes, la entrada de la ciudad, para hoy en día ser considerada como un sitio turístico de gran valor histórico, que ya no es visitado por mercaderes de esclavos, sino por personas de todo el mundo que están interesadas en apreciar con sus propios ojos la belleza de esta obra.
Su construcción tuvo lugar en el año de 1601 y en sus inicios fue llamada "la puerta del puente", debido al viaducto de madera que pasaba por encima del caño de san Anastasio, uniendo así la isla de Getsemaní, con la de Calamarí (centro). Es de admirar su gran composición geométrica.

Reconozcamos a la torre del reloj, como un patrimonio de Cartagena y del mundo, digno de admirar.

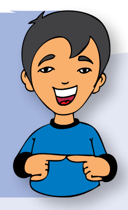
http://www.rentapar.com/rese%C3%B1as/la-torre-del-reloj/



Este capítulo fue clave porque

- Aprendí lo importante que fueron para la geometría los matemáticos Thales de Milleto y Pitágoras de Samos.
- Ahora reconozco al triángulo como una de las figuras básicas sin las cuales la geometría no tendría sentido.
- Al comprender la diferencia entre semejanza y congruencia encontré mayor importancia a las construcciones a escala.
- Identifico los criterios y características de las figuras semejantes y de las figuras congruentes.

Conectémonos con La Ingeniería



La cercha

La cercha es uno de los principales tipos de estructuras empleadas en ingeniería.

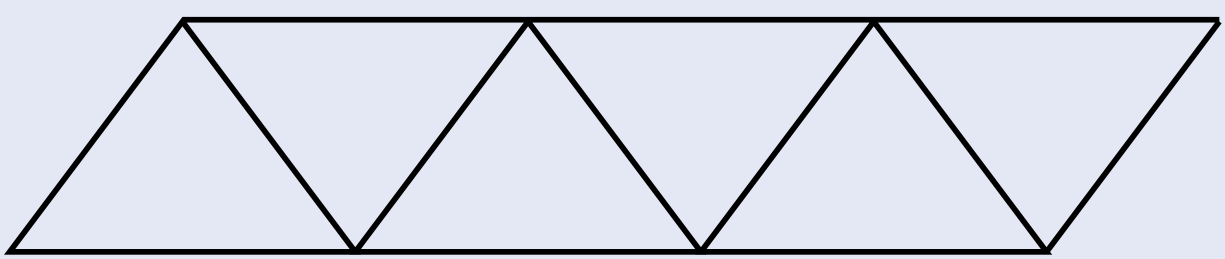
Proporciona una solución práctica y económica a muchas situaciones de ingeniería, especialmente en el diseño de puentes y edificios.

Una armadura consta de barras rectas unidas mediante juntas o nodos formando triángulos.

Los elementos de una cercha se unen sólo en los extremos por medio de pasadores sin fricción para formar armazón rígida; por lo tanto ningún elemento continúa más allá de un nodo.

Cada cercha se diseña para que soporte las cargas que actúan en su plano y, en consecuencia, pueden considerarse como una estructura bidimensional. Todas las cargas deben aplicarse en las uniones y no en los mismos elementos. Por ello cada cercha es un elemento sometido a fuerzas axiales directas (tracción o compresión).

http://webdelprofesor.ula.ve/arquitectura/jorgem/principal/guias/cercha.pdf



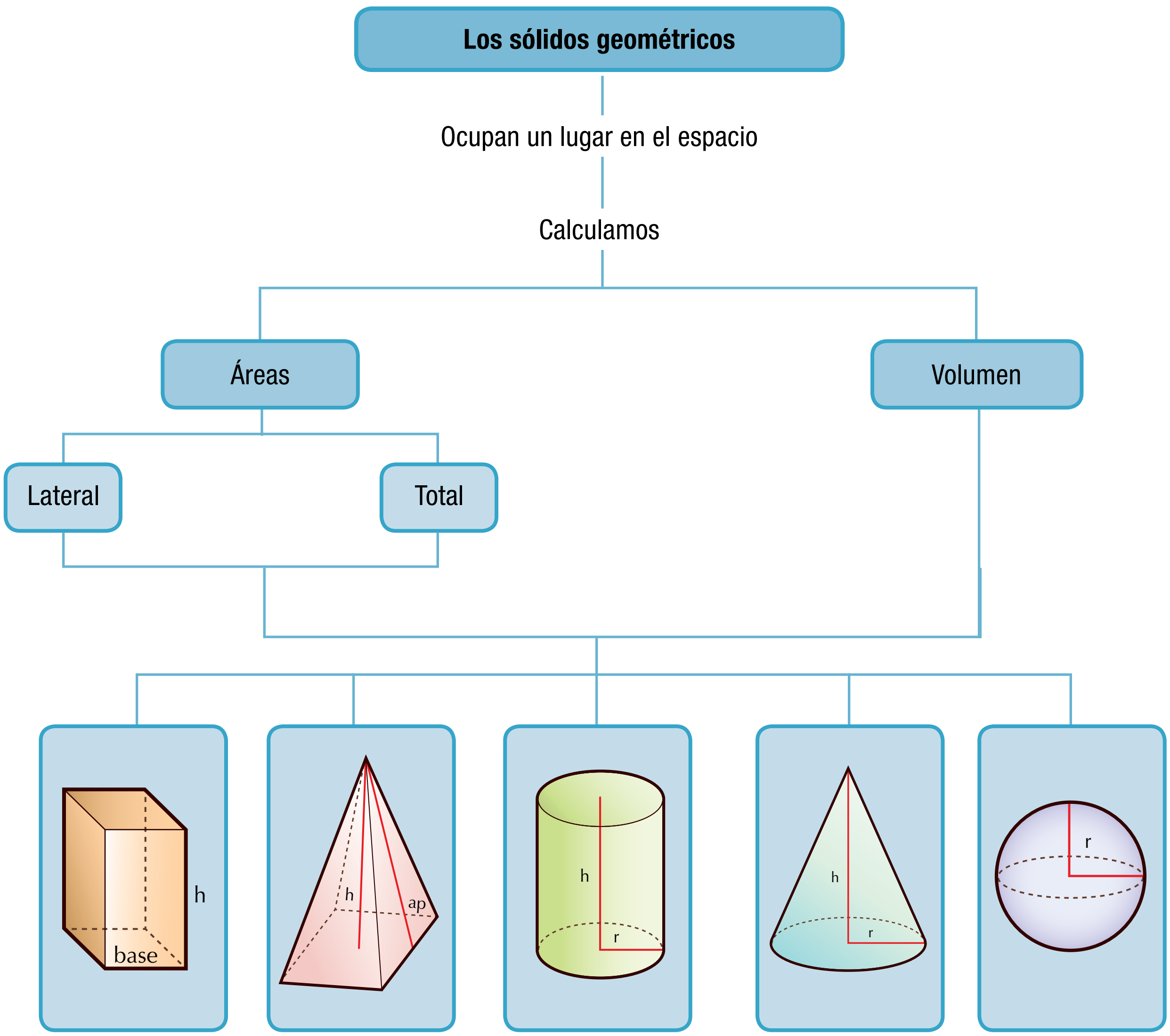
Los sólidos geométricos

Desde la Antigüedad, las personas han utilizado formas de sólidos geométricos en la arquitectura, la ingeniería, el arte y en muchos otros campos. Seguramente has visto productos empacados en cajas de forma cúbica, prismática, piramidal, cónica o esférica.

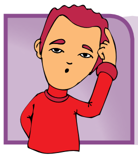
El desarrollo de este capítulo amplía el estudio de los sólidos geométricos que realizaste en el grado 7º.

La búsqueda de regularidades y de relaciones entre dimensiones de un cuerpo, te permitirá encontrar expresiones para calcular longitudes de aristas y diagonales y áreas de caras y volúmenes.

Para ello, se aplicarán expresiones para el cálculo de las áreas y los volúmenes de los cuerpos geométricos.



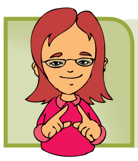
Tema 1. Problemas sobre áreas



Indagación

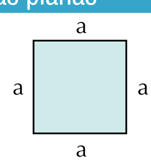
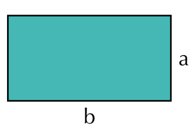
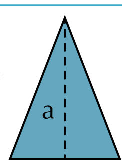
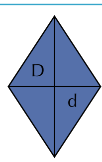
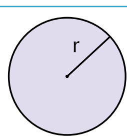
Calcula el perímetro y el área del piso del salón de clase. Elige una unidad de medida que quieras y puedes hacerlo con una regla, una cinta métrica, una hoja cuadriculada, etc.

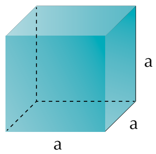
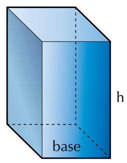
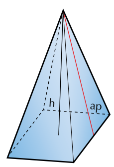
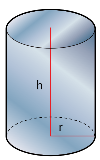
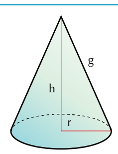
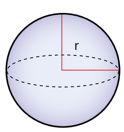
En tu cuaderno, realiza un dibujo escribiéndole las dimensiones, haz los cálculos necesarios y después compara tus resultados con los de otros compañeros y comenten al respecto.



Conceptualización

En los cursos anteriores estudiamos las figuras planas, modelamos algunos sólidos y analizamos sus áreas laterales y totales. Recordemos los aspectos importantes sobre las figuras planas y los sólidos para proceder a solucionar problemas:

Figuras planas	Perímetro	Área
Cuadrado 	$P_{\square} = a + a + a + a = 4a$	$A_{\square} = (a)(a) = a^2$
Rectángulo 	$P_{\square} = a + b + a + b$ $= 2a + 2b$	$A_{\square} = (a)(b) = ab$
Triángulo 	$P_{\triangle}$ = Suma de los lados	$A_{\triangle} = \frac{ba}{2}$
Rombo 	$P_{\lozenge}$ = Suma de los lados	$A_{\lozenge} = \frac{D + d}{2}$
Círculo 	Longitud de la circunferencia $L_c = 2\pi\, r$	$A_c = \pi\, r^2$

Sólidos	Área lateral	Área total	Volumen
Cubo 	A_L = suma de áreas de caras laterales $A_L = 4a^2$	$A_T = 6a^2$	$V = a^3$
Prisma recto 	A_L = suma de áreas de caras laterales $A_L = (\text{Perímetro}_{Base})\,(h)$	$\text{Total} = A_{Lateral} + 2 \cdot A_{Base}$	V = (área de la base)(altura) $V = (\text{Área}_{Base})\,(h)$
Pirámide recto 	A_L = suma de áreas de caras laterales	$A = \frac{P.\,(a_{Base} + a_{Lateral})}{2}$	$V = \frac{1}{3}$ (área de la base)(altura) $V = \frac{1}{3} A_B\, h$
Cilindro 	$A = 2\pi rh$	$A = 2\pi r(h + r)$	$V = \pi r2h$
Cono 	$A = 2\pi rg$	$A = \pi r(r + g)^2$	$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$
Esfera 	$A = 4\pi r^2$		$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

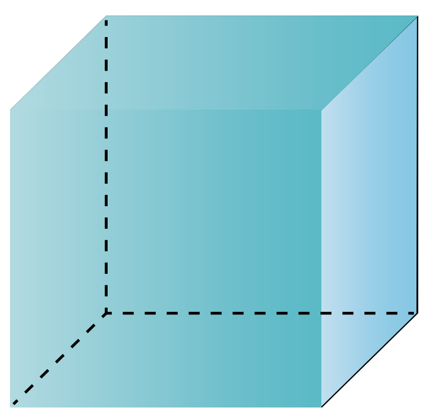
Cubo y prisma

Hemos dicho que un poliedro es un cuerpo geométrico de caras planas y con un volumen determinado. También podemos decir que es una región del espacio limitada por polígonos. Los poliedros son cuerpos tridimensionales, es decir que tienen tres dimensiones: largo, ancho y altura o en vez de altura pueden tener profundidad y sus 6 caras son planas.

Ahora, si en el poliedro, sus caras son cuadradas y de iguales dimensiones se llama cubo u ortoedro.

1. Dado un cubo como el de la figura, calculemos:

   a. Área lateral
   b. Área total



$a = 5$ cm

Solución

a. Para calcular el área lateral del cubo dado, calculamos el área de 1 cara y la multiplicamos por 4, porque el cubo tiene 4 caras laterales y 2 bases, todas de igual área.

El área lateral (A_L) del cubo es igual a la suma de las áreas de las caras laterales.

Área de 1 cara = $(5 \text{ cm})^2 = (5 \text{ cm})(5 \text{ cm}) = 25\text{cm}^2$ por ser un cuadrado.

$$A_L = 4(25 \text{ cm}^2) = 100 \text{ cm}^2.$$

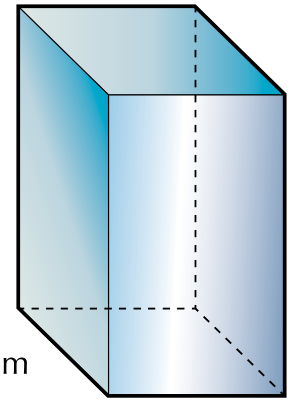
b. Como todas sus caras son cuadrados iguales, entonces

el área total (A_T) = área lateral + áreas de las bases.

$$A_T = 4(25 \text{ cm}^2) + 2(25 \text{ cm}^2) = \mathbf{150 \text{ cm}^2}.$$

2. Un paralelepípedo rectangular tiene las siguientes dimensiones: largo 15 cm, ancho 9 cm y altura 6 cm. Encontremos:

a. Área lateral
b. Área total



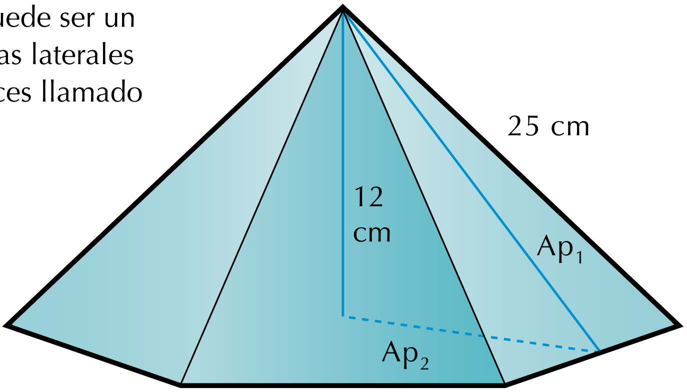
Solución

a. $A_L = 2(15 \text{ cm})(9 \text{ cm}) + 2(15 \text{ cm})(6 \text{ cm})$
$= 270 \text{ cm}^2 + 180 \text{ cm2} = \mathbf{450 \text{ cm}^2}.$

b. Área total = Área lateral
Área total = 2(15cm)(9 cm) + 2(15cm)(6 cm) + 2(9 cm)(6 cm)
$= 270 \text{ cm}^2 + 180 \text{ cm}^2 + 108 \text{ cm}^2 = \mathbf{558 \text{ cm}^2}.$

Pirámide

Es un poliedro o cuerpo geométrico cuya base puede ser un polígono de cualquier número de lados y sus caras laterales son triángulos que coinciden en uno de sus vértices llamado vértice de la pirámide.

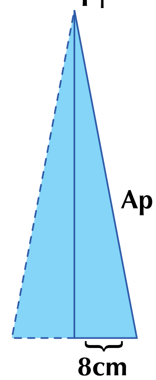


3. Una caja de forma piramidal tiene como base un hexágono regular de longitud 16 cm y su altura es de 12 cm. Calculemos:

a. Apotema de la pirámide
b. Área lateral
c. Área total

Solución

a. Llamemos $\mathbf{Ap_1}$ a la apotema de la pirámide.



Podemos calcular $\mathbf{Ap_1}$
Aplicando el teorema de Pitágoras, tenemos:

$$(25\ \text{cm})^2 = (Ap_1)^2 + (8\ \text{cm})^2$$

$$(Ap_1)^2 = (25\ \text{cm})^2 - (8\ \text{cm})^2$$

$$(Ap_1)^2 = 625\ \text{cm}^2 - 64\ \text{cm}^2 = 561\ \text{cm}^2$$

$$Ap_1 = \sqrt{561\text{cm}^2} = 23.3\text{cm}$$

b. Para hallar el área lateral, debemos saber que

el área lateral de la pirámide es igual al semiperímetro por la apotema.

$$A_L = 6(\text{área de 1 cara lateral}) = (\text{semiperímetro})(\text{apotema de la pirámide})$$

$$A_L = 6\ (\text{área de 1 cara lateral})$$

$$A_L = \frac{\cancelto{3}{6}(16\text{cm})(23.3\text{cm})}{\cancelto{1}{2}} = 3(16\text{cm})(23.3\text{cm}) = 1.118.4\text{cm}^2$$

c. Antes de calcular el área total, debemos encontrar la apotema (Ap_2) de la base de la pirámide.

Como la base de la pirámide es un hexágono regular de lado 16 cm, entonces aplicamos el teorema de Pitágoras para averiguar la apotema de la base Ap_2.

Recordemos que según Pitágoras:

En todo triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

$$(16\ \text{cm})^2 = (Ap_2)^2 + (8\ \text{cm})^2$$

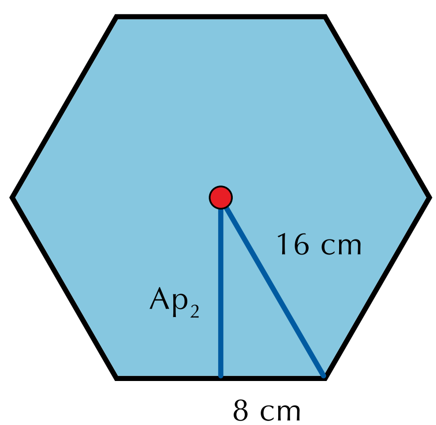
$$(Ap_2)^2 = (16\ \text{cm})^2 - (8\ \text{cm})^2$$

$$(Ap_2)^2 = 256\ \text{cm}^2 - 64\ \text{cm}^2$$

$$(Ap_2)^2 = 192\ \text{cm}^2$$

$$Ap_2 = \sqrt{192\ \text{cm}^2}$$

$$Ap_2 = 13.86\ \text{cm}^2$$



Ahora, averiguamos el área de la base de la pirámide (hexágono regular de lado 16 cm):

$$A_{base} = \frac{6(16cm)(13.86cm)}{2} = \frac{1{,}330.56}{2} = 665.28cm^2$$

El área total la pirámide es igual a la suma del área lateral con el área de la base.

El área total de la pirámide será:

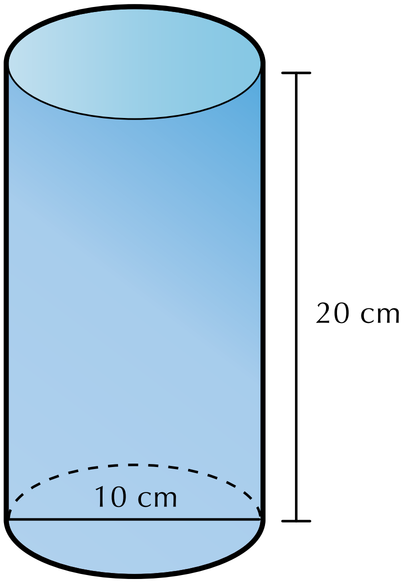
$$A_T = \text{Área lateral} + \text{Área de la base}$$

$$A_T = 1{,}118.4\ cm^2 + 665.28\ cm^2 = 1{,}783.68\ cm^2$$

Cilindro

Es un cuerpo geométrico o sólido cuya cara lateral es curva y sus bases son circulares.

Un cilindro de revolución se puede generar por el giro de un rectángulo sobre uno de sus lados.

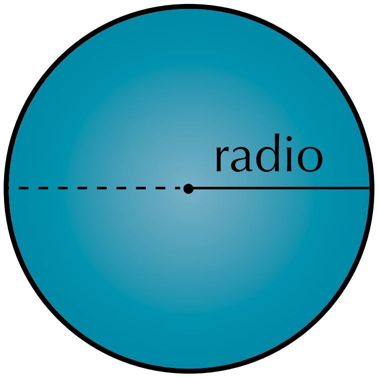


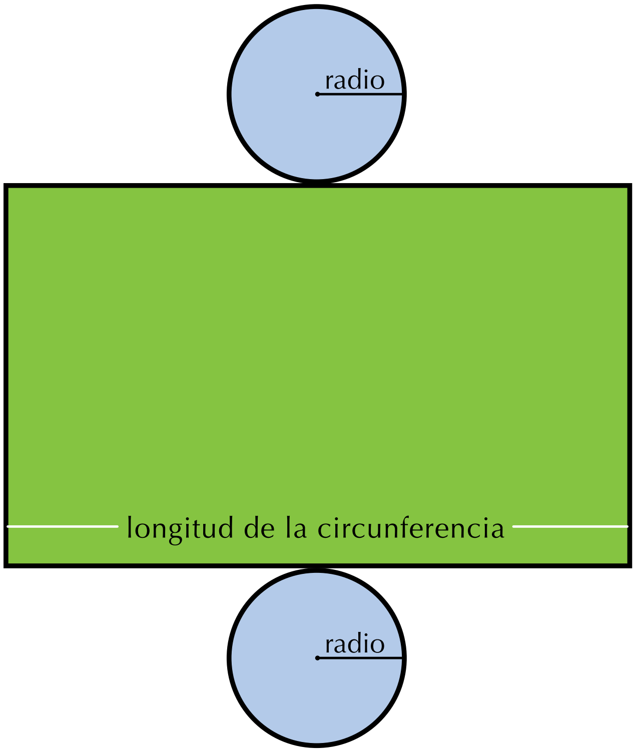
4. Un tarro cilíndrico tiene una altura de 20 cm y el diámetro de su base es de 10 cm.
   Encontremos:

   a. Radio de la base del cilindro
   b. Área lateral
   c. Área total

Solución

a. Si el diámetro de la base es 10 cm, entonces el radio es 5 cm, porque en todo círculo la longitud del radio es igual a la mitad del diámetro.
b. ***El área lateral del cilindro es igual a longitud de la circunferencia por la altura: AL = (2πr)(h).***





El área lateral del cilindro dado está con color verde:

$$A_L = (2\pi r)(h)$$

$$A_L = 2\pi(5 \text{ cm})(20 \text{ cm})$$

$$A_L = \pi(10 \text{ cm})(20 \text{ cm})$$

$$A_L = 200\pi \text{ cm}^2$$

La respuesta puede dejarse expresada en términos de π, o también así:

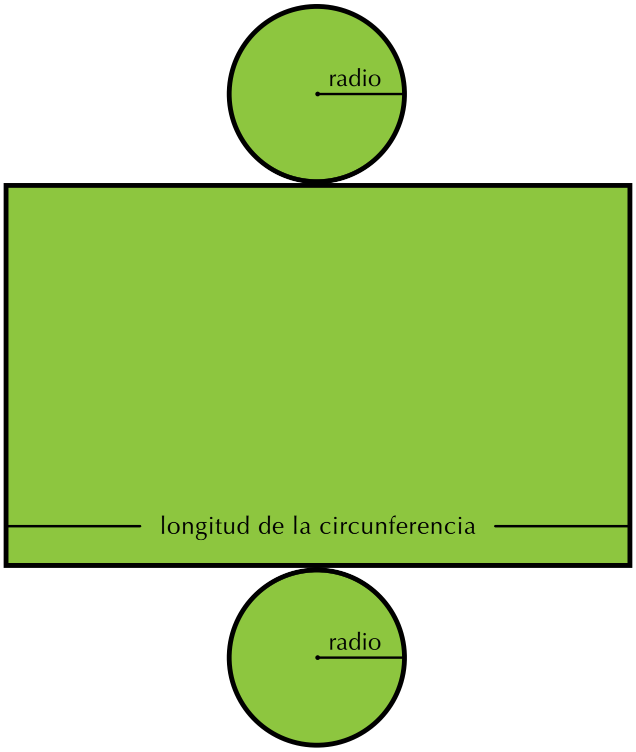
$$A_L = 200(3.1416) \text{ cm}^2$$

$$A_L = 628.32 \text{ cm}^2.$$

c. En cuanto al área total del cilindro dado, este está en color verde:

Entonces, área total del cilindro es igual al área lateral más el área de sus bases:

AT = área lateral + área de las bases que son 2 círculos.



$$A_T = A_L + 2(\pi r^2)$$

$$A_T = 628.32 \text{ cm}^2 + 2\pi (5 \text{ cm})^2$$

$$A_T = 628.32 \text{ cm}^2 + 2\pi (25 \text{ cm}^2)$$

$$A_T = 628.32 \text{ cm}^2 + 50\pi \text{ cm}^2$$

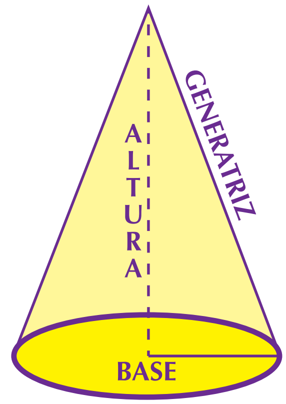
$$A_T = 628.32 \text{ cm}^2 + 157.08 \text{ cm}^2$$

$$A_T = 785.40 \text{ cm}^2.$$

Cono

El cono es un cuerpo geométrico que se genera por el giro de un triángulo rectángulo sobre uno de sus catetos.

El círculo es la base del cono, el lado se denomina generatriz (g) y el segmento que une el centro del círculo con el vértice es la altura.



Área lateral del cono

5. Calculemos el área lateral y el área total del cono de generatriz 13 cm y cuya base tiene un radio de 5 cm.

$$A_L = \frac{\text{(Longitud de la circunferencia)(Generatriz)}}{2}$$

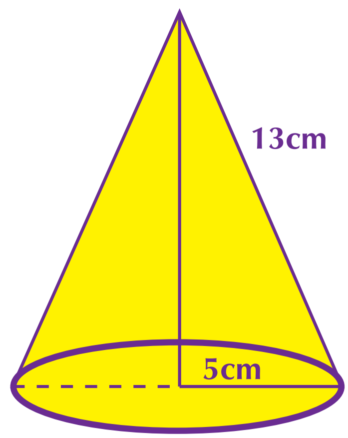
$$A_L = \frac{(\cancel{2}\pi r)(g)}{\cancel{2}}$$

$$A_L = \pi\, r\, g$$

$$A_L = \pi\ (5\ \text{cm})\ (13\ \text{cm})$$

$$A_L = 204.204\ \text{cm}^2$$

Entonces, el área lateral del cono es igual a π por radio por generatriz.



Área total del cono:

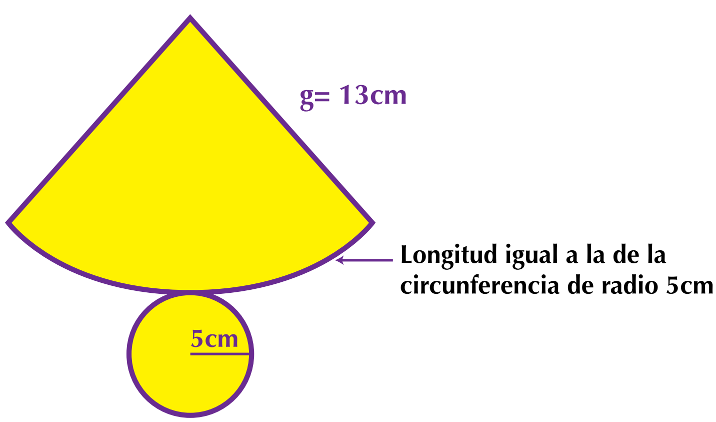
$$A_T = \text{Área lateral} + \text{Área de la base}$$

$$A_T = \pi\, r\, g + \pi\, r^2$$

Factorizando: $A_T = \pi\, r\, (g + r)$

$$A_T = 204.204\ \text{cm}^2 + \pi\ (5\ \text{cm})\ (13 + 5\ \text{cm})$$

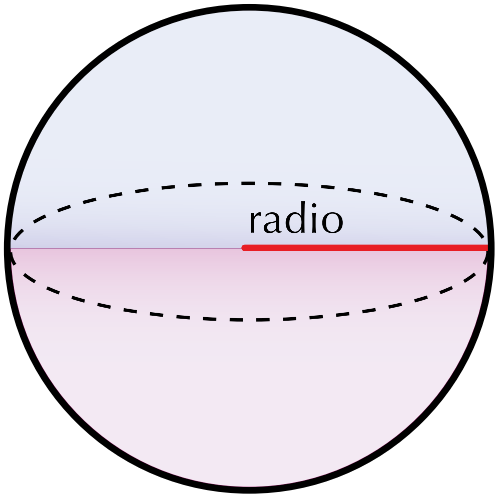
$$A_T = 486.948...\ \text{cm}^2$$



Esfera

La esfera es un cuerpo geométrico limitado por una superficie curva cerrada, cuyos puntos equidistan de otro punto interior llamado centro de la esfera.

La esfera de revolución se genera por el giro de un semicírculo (medio círculo) sobre su diámetro.



Área de la esfera

6. Una pelota tiene 14 cm de diámetro. Calculemos su área:

Solución

Como el radio es la mitad del diámetro y si el diámetro de la esfera es 14 cm, entonces el radio será 7 cm.

$$A = 4\,\pi\,r^2$$
$$A = 4\,\pi\,(7\text{ cm})^2$$
$$A = 4\,\pi\,(49\text{ cm}^2)$$
$$A = 196\,\pi\text{ cm}^2$$

En la esfera se habla de un solo tipo de área y se calcula mediante la aplicación de la fórmula $4\pi r^2$.

Aplicación

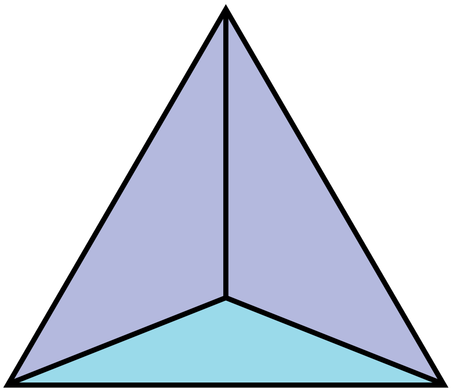
1. Un salón tiene 5 m de largo, 40 dm de ancho y 2,500 mm de alto. Calcula:

   a. El área lateral, en metros cuadrados.
   b. El área total, en centímetros cuadrados.

2. Un cubo de 10 cm de arista se pretende forrar con un papel de colores.
   ¿Cuántos cm^2 de papel se necesitan?
3. El tanque de almacenamiento de agua de una fábrica es de forma esférica y mide 2 m. de radio. Calcula su área.
4. Si una pirámide de base cuadrada mide 14.5 m de lado en la base y 8.75 m de altura, calcula:

   a. Área lateral.
   b. Área total.

5. El tetraedro de la figura mide 4.5 cm de arista. Calcula:



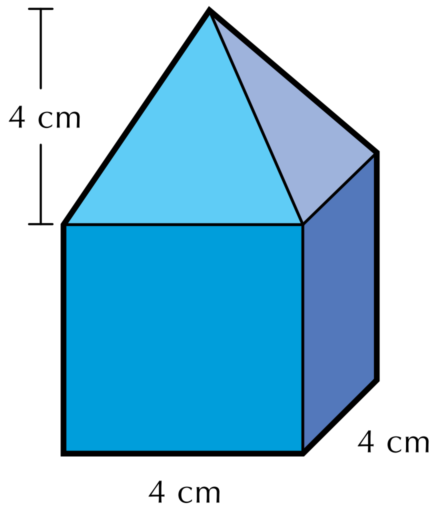
   a. Área lateral
   b. Área total

6. Un cono, cuya base tiene un radio de 15 cm, tiene una altura de 50 cm. Calcula:

   a. Área lateral
   b. Área total

Los ejercicios 7 y 8 se realizan con la siguiente información:

La figura adjunta está compuesta por un cubo de 4 cm de lado y sobre él está un tetraedro de 4 cm de altura.



7.

a. Encuentra el área lateral del cubo
b. Encuentra el área total del tetraedro

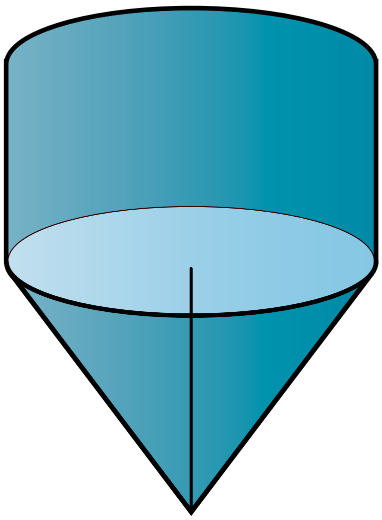
8.

a. Calcula el área lateral de la figura compuesta
b. Calcula el área total de la figura compuesta

Los ejercicios 9 y 10 se realizan con la información que se presenta a continuación:

La figura representa una composición de un cilindro y un cono.

Las alturas del cilindro y del cono son iguales a 10 cm y el radio de la base del cono y del cilindro es de 5 cm.



9.

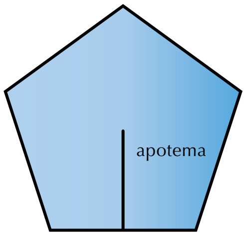
a. Calcula el área lateral del cono
b. Calcula el área lateral del cilindro

10.

a. Calcula el área lateral de la figura compuesta
b. Calcula el área total de la figura compuesta

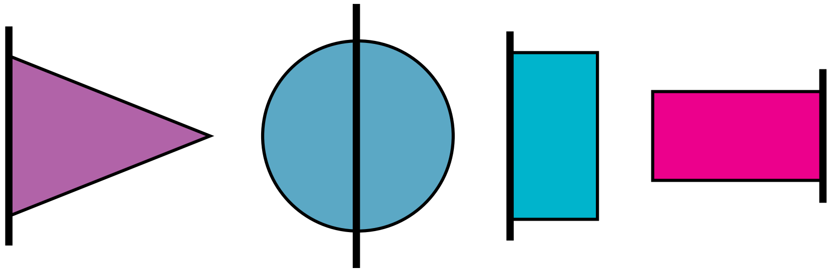
Entendemos por…

Apotema aquel segmento perpendicular que se traza desde el punto medio de cada lado del polígono regular hasta su centro.



Diversión matemática

Recorta en cartón cada figura dada a continuación y en uno de sus lados o aristas pégale un palito de tal modo que sobresalga en los extremos del lado.



Haz girar la figura y describe el tu cuaderno el cuerpo geométrico que se genera. Estos sólidos generados se llaman sólidos de revolución.

Día a día

La hectárea (ha)

Se utiliza para medir grandes superficies rurales, bosques, plantaciones y demás extensiones de terrenos naturales.

La hectárea, conocida también como hectómetro cuadrado o hm² es la superficie que ocupa un cuadrado de un hectómetro de lado, que totaliza con ello una superficie de 100 m x 100 m = 10,000 m².

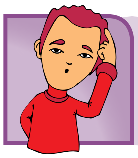
Su símbolo es **ha** tanto en singular como en plural.

Las unidades de medida que sirven para medir grandes extensiones de terreno se llaman medidas agrarias.

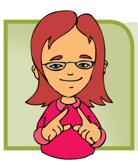
Además de la hectárea, existe el área (a) que equivale a un decámetro cuadrado y la centiárea que es un metro cuadrado.

Tomado de: http://es.wikipedia.org/wiki/Hect%C3%A1rea http://www.convertworld.com/es/area/Hect%C3%A1rea.html

Tema 2. Problemas sobre volúmenes de sólidos



Indagación



Observa a tu alrededor e identifica cosas u objetos que ocupan un lugar en el espacio.

En tu cuaderno, dibújalos y haz su descripción, teniendo en cuenta forma, tamaño, colores, parecido con figuras o cuerpos geométricos, etc.

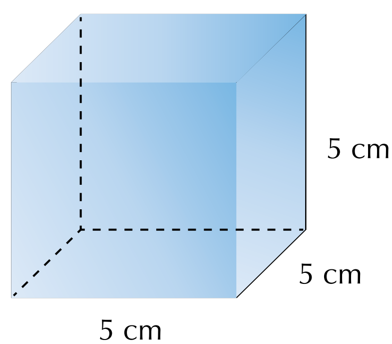
Con dos o tres compañeros, comparte tu experiencia.

Conceptualización

1. Dado el cubo de 5 cm de arista (lado), calculemos su volumen:
   Solución

$$\text{Volumen del cubo} = \text{arista al cubo} = a^3$$

$$V = (5\text{ cm})^3 = \underbrace{(5\text{cm})(5\text{cm})}_{\text{Área de la base}}\ \underbrace{(5\text{cm})}_{\text{Altura}} = \mathbf{125\ cm^3}$$

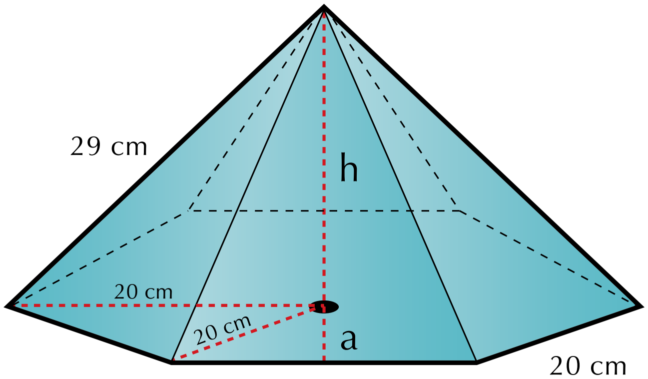


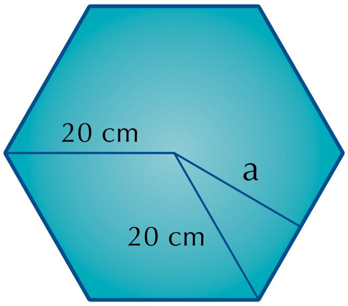
2. Calculemos el volumen de un paralelepípedo rectangular que tiene las siguientes dimensiones: largo 15 cm, ancho 9 cm y altura 6 cm.
   Solución

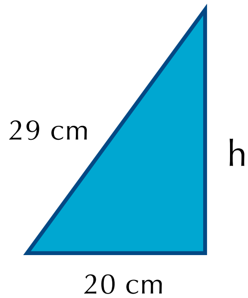
$$\text{Volumen del paralelepípedo} = (\text{Área de la base})(\text{altura})$$

$$V = \underbrace{(6\text{cm})(9\text{cm})}_{\text{Área de la base}}\ \underbrace{(15\text{cm})}_{\text{Altura}} = \mathbf{125\ cm^3}$$

3. Una pirámide regular tiene de base un hexágono de 20 cm de lado y de arista lateral 29 cm.
   Calcula su volumen.
   Solución







Por medio del teorema de Pitágoras, calculamos la altura h de la pirámide y la apotema ***a*** de la base.

$$h = \sqrt{(29\text{cm})^2 - (20\text{cm})^2} = \sqrt{841\text{cm}^2 - 400\text{cm}^2} = \sqrt{441\text{cm}^2} = 21\text{cm}$$

$$a = \sqrt{(20\text{cm})^2 - (10\text{cm})^2} = \sqrt{400\text{cm}^2 - 100\text{cm}^2} = \sqrt{300\text{cm}^2} = 17.32\text{cm}$$

Sabemos que el volumen de la pirámide es un tercio del producto del área de la base y su altura.

$$V = \frac{(A_{base})(h)}{3}$$

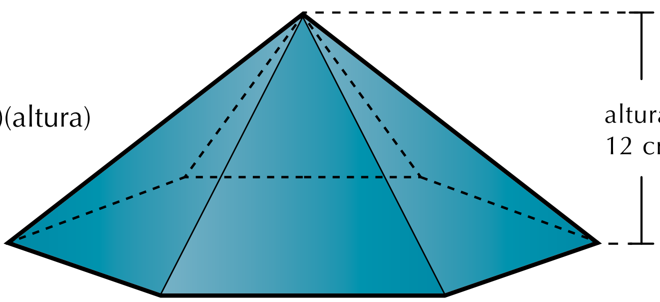
$$A_{base} = \frac{(\text{Perímetro})(\text{Apotema})}{2} = \frac{Pa}{2} = \frac{(120\text{cm})(17.3\text{cm})}{2} = 1{,}038\text{cm}^2$$

$$V = \frac{(1{,}038\text{cm}^2)(21\text{cm})}{3} = 7{,}266\text{cm}^3$$

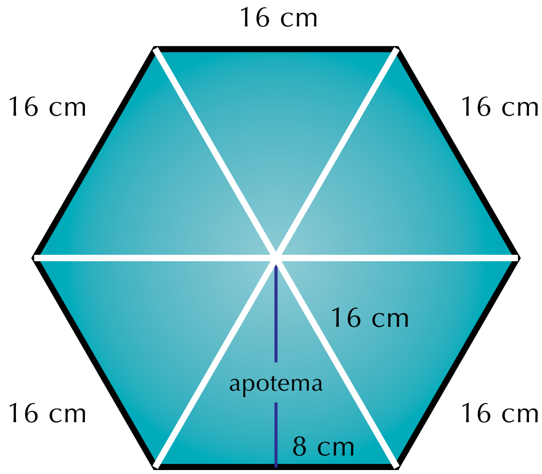
El volumen de la pirámide hexagonal dada es 7,266 cm^3.

3. Una caja de forma piramidal tiene como base un hexágono regular de lado 16 cm y su altura es de 12 cm.
   Calculemos su volumen.
   Solución

Volumen de la pirámide = $\frac{1}{3}$ (área de la base)(altura)



Como la base de la pirámide es un hexágono regular, entonces calculamos su apotema aplicando el teorema de Pitágoras:



$$apotema = \sqrt{(16cm)^2 - (8cm)^2} = \sqrt{256cm^2 - 64cm^2}$$

$$= \sqrt{192cm^2}$$

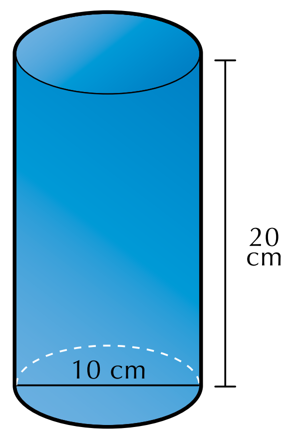
$$= 13.9 \text{ cm}$$

El área del hexágono, que es la base de la pirámide, será la suma de las áreas de los 6 triángulos equiláteros que forman el hexágono:

$$Ahex = \frac{6(16cm)(13.9cm)}{2} = \frac{1{,}334.4cm^2}{2} = 667.2cm^2$$

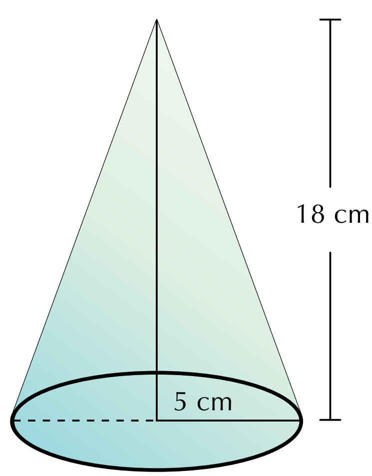
$$A_{pirámide} = \frac{1}{3} = \underbrace{(667.2cm)}_{\text{Área de la base}} \underbrace{(12cm)}_{\text{Altura}} = 2{,}668.8cm^3$$

4. Un tarro cilíndrico tiene una altura de 20 cm y el diámetro de su base es de 10 cm. Encontremos el volumen:
Solución



$$\text{Volumen del cilindro} = (\text{Área de la base})(\text{altura})$$
$$V = \pi r^2 h$$
$$V = \pi(5 \text{ cm})^2(20 \text{ cm})$$
$$V = \pi \ 500 \text{ cm}^2$$

5. Calculemos el volumen del cono cuya altura es 18 cm y su base tiene un radio de 5 cm.
Solución



$$\text{Volumen del cono} = \frac{1}{3} (\text{Área de la base})(\text{altura})$$

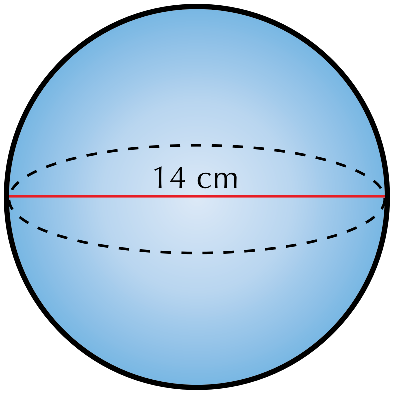
$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

$$V = \frac{1}{3} \pi (5 \text{ cm})^2 (18 \text{ cm})$$

$$V = (25 \text{ cm}^2)(6 \text{ cm}) \pi$$

$$V = (150 \text{ cm}^3) \pi$$

6. Una pelota tiene 14 cm de diámetro. Encontremos su volumen:



Solución

Como el radio es la mitad del diámetro, entonces si el diámetro de la esfera es 14 cm, el radio será 7 cm.

El volumen de la esfera es cuatro tercios de pi multiplicados por el cubo del radio.

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$V = \frac{4}{3}\pi\ (7\ \text{cm})^3$$

$$V = \frac{4}{3}\pi\ (7\ \text{cm})^3 = \frac{4}{3}\pi\ (343\ \text{cm}^3) = 457.33\pi\ \text{cm}^3$$

Aunque la respuesta puede darse en términos de π, puede también resolverse el producto:

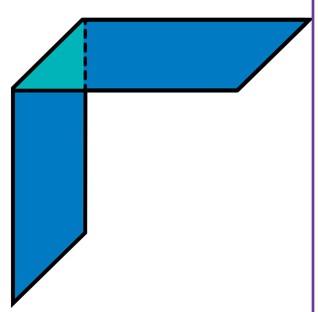
$$V = 457.33\pi\ \text{cm}^3 = (457.33)(3.1416...) = 1{,}436.75\ \text{cm}^3$$

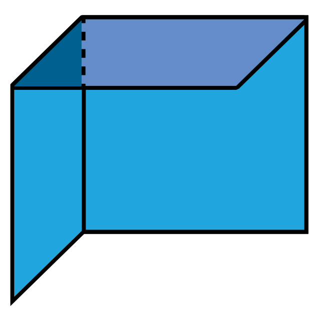
Aplicación

1. Calcula el volumen, en centímetros cúbicos, de una habitación que tiene 6 m de largo, 50 dm de ancho y 2.8 m de alto.
2. En una bodega de 5 m de largo, 3 m de ancho y 2 m de alto, Pedro quiere almacenar cajas de dimensiones 10 dm de largo, 6 dm de ancho y 4 dm de alto. ¿Cuántas cajas podrá almacenar?
3. ¿Cuántas baldosas cuadradas de 20 cm de lado se necesitan para enchapar una piscina de 10 m de largo por 6 m de ancho y de 3 m de profundidad?
4. Determina el área total de un tetraedro, un octaedro y un icosaedro de 5 cm de arista.
5. Calcula la altura de un prisma que tiene como área de la base 12 dm^2 y 48 l de capacidad.
6. ¿Cuánta hojalata se necesitará para hacer 10 alcancías cilíndricas de 10 cm de diámetro y 20 cm de altura?
7. Calcula el área total y el volumen de un cilindro que tiene por altura la misma longitud que la circunferencia de la base que es de 125.66 cm.
8. La cúpula de una catedral tiene forma semiesférica de radio 50 m. Calcula su área y su volumen.
9. Un recipiente cilíndrico de 5 cm de radio y 10 cm de altura se llena de agua. Si la masa del recipiente lleno es de 2 kg, ¿cuál es la masa del recipiente vacío?
10. Para una fiesta, Luis ha hecho 20 gorros de forma cónica con cartón. ¿Cuánto cartón habrá utilizado si las dimensiones del gorro son 15 cm de radio y 25 cm de generatriz?

Entendemos por…

Ángulo diedro aquella figura formada por dos planos que se cortan. Por ejemplo, el ángulo formado por dos caras de un cubo.

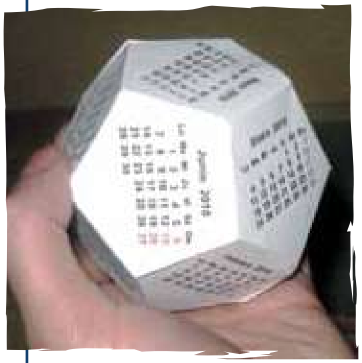




Ángulo triedro aquella figura formada por tres planos que se cortan. Como la esquina formada por tres paredes de una habitación

Diversión matemática

Calendario dodecaédrico



Para divertirte recortando y armando, puedes hacer tu calendario dodecaédrico, es decir que tiene forma de dodecaedro.

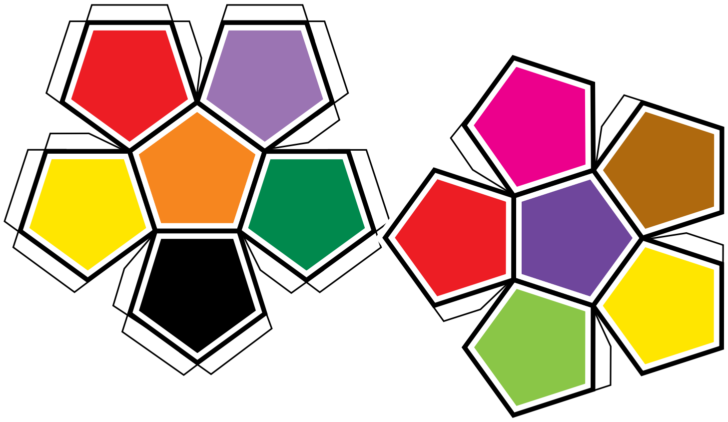
El dodecaedro es un sólido o cuerpo geométrico de 12 caras iguales.

En cada cara irán escritos los días de un mes del año.

Copia el molde de colores del tamaño que quieras hacer tu calendario.

Escribe en cada pentágono (cara) los días y las fechas de un mes; luego recórtalo, dóblalo y pégalo con algún pegante del que dispongas.

Deja el mes de noviembre de último lugar para obtener un mejor resultado.



Tomado de http://www.calendario2012.com/calendarios-imprimir-dodecaedricos.htm

Día a día

El uso de la madera

La madera fue uno de los primeros materiales utilizados por el ser humano, alrededor de 2000 años antes de Cristo.

Fue uno de los materiales predilectos para la construcción de palacios, templos y casas.

La madera es un material o recurso renovable, pero infortunadamente es hoy objeto de una explotación descontrolada.

Existen tantas variedades de madera como tipo de árboles.

Sin embargo, no todas son adecuadas para trabajos de carpintería; en algunos casos son demasiado blandas o se deterioran con facilidad.

Se pueden clasificar en maderas blandas y maderas duras.

Las maderas blandas proceden básicamente de coníferas (pino) o de árboles de crecimiento rápido. Son las más abundantes y baratas.

La pulpa de madera es de gran importancia para la producción de papel. Las maderas duras proceden de árboles de crecimiento lento (caoba), por lo que son más costosas y, debido a su resistencia, suelen emplearse en la realización de muebles de calidad.

Los principales países productores de madera son Estados Unidos, Rusia, Canadá, Japón, Suecia, Alemania, Polonia, Francia, Finlandia y Brasil.

Tomado de http://html.rincondelvago.com/madera_9.html

Este capítulo fue clave porque

- Comprendí la importancia de los teoremas básicos de la geometría.
- Aprendí a utilizar el teorema de Pitágoras.
- Aprendí a aplicar el teorema de Tales.
- Calculé áreas de sólidos o cuerpos geométricos.
- Calculé volúmenes de sólidos o cuerpos geométricos.

Conectémonos con La Industria

Torno para tallar madera

El torno para tallar es una máquina que se emplea en la fabricación de piezas con formas geométricas, en especial, piezas de madera torneadas.

Existen tornos mecánicos y automáticos.

El torno para tallar madera es una herramienta para mecanizar piezas por revolución, mediante una herramienta de corte.

Generalmente, el movimiento de corte que se le imparte a la pieza gira, rotando en su propio eje gracias a un motor eléctrico que transmite su giro al husillo mediante un sistema de engranajes.

El torno para madera puede realizar cortes en varias formas, tales como cilindro, cono, esferas, etc.

También realiza taladrado, ranurado, refrendado, etc.

Actualmente, representa una de las maquinarias más importantes en cualquier proceso industrial.

Tomado de http://www.maquinariapro.com/obra/torno-para-madera.html

Repasemos lo visto

Al iniciar la unidad te preguntábamos: ¿cuál es la importancia de las figuras y de los cuerpos geométricos en la vida de las personas? ¿Lo recuerdas?

Ahora puedes responder con toda propiedad esta pregunta.

Tal como Sofía, que intentaba calcular la altura del cuerpo del hombre de la estatua diseñaba un plano que le ayudara a encontrarla, tú también puedes ayudarte con dibujos o diagramas para solucionar los problemas.

Cuentas con herramientas valiosas en tu trabajo matemático, como son los teoremas de Tales y Pitágoras, los criterios de semejanza y congruencia y los conocimientos sobre los sólidos para el cálculo de áreas y volúmenes.

Mundo rural

La guadua

La guadua es una de las especies del bambú.

En América existen alrededor de 290 especies de guadua y bambú. En Colombia y Ecuador se desarrollan en abundancia en regiones muy fértiles hasta los 2,000 m de altura. En nuestro país se encuentran en gran parte en el eje cafetero.

La más conocida es la llamada científicamente “Bambusa guadua”, que es la que tiene mayor diámetro, espesor y resistencia entre las nativas de América y, por tanto, es de las especies que tiene mayor valor económico, por sus múltiples aplicaciones, entre ellas, en la construcción. Pero a pesar de su importancia, se tiene poco aprecio por este recurso que se corta intensivamente y sin ningún control.

En Colombia, específicamente, se han arrasado grandes extensiones de guaduales, con el fin de aumentar las áreas de otros cultivos considerados más rentables. No obstante, si la destrucción de la guadua continúa a ese ritmo, solo restan unos pocos años para lograr su completa extinción.

Los tallos difieren según la especie en altura, diámetro y forma de crecimiento; estos van desde unos pocos centímetros hasta 40 m de altura y diámetro de 10 a 15 cm en promedio. Debido a su tejido delicado, el tallo está protegido con hojas en forma triangular originadas en cada uno de los nudos que se van formando.

El tallo brota del suelo con el diámetro máximo que tendrá, desarrolla su longitud completa y luego crecen las ramas y hojas. Terminada su formación, empieza el periodo de maduración, que alcanza su máximo grado entre los tres y seis años, generalmente. La especie se desarrolla normalmente bajo las siguientes condiciones: suelos arcillosos, arcillolimosos y francos formados de aluviones de los ríos o subestratos. (Nacimientos y vegas de ríos y quebradas). Suelos bien drenados, pero también se encuentra en lechos cenagosos o húmedos; lluvias entre 1,270 mm y 4,050 mm; temperaturas entre 15 y 36 °C; humedad relativa entre 80 y 100%; y una altitud entre 400 y 2,000 m sobre el nivel del mar.

Los guaduales ubicados en las riberas toman grandes cantidades de agua en las épocas lluviosas y la almacenan, tanto en su sistema radicular como en la parte aérea y en el suelo, y luego, por efectos de concentración, el agua retenida nuevamente regresa al caudal del río durante las épocas de sequía.

Mantener guaduales a orillas de los ríos equivale a poseer tanques de almacenamiento de agua, por ello con razón se afirma que donde hay guadua hay regulación del agua.

Asimismo, los guaduales generan una fuente importante de materia orgánica para el suelo, debido a la acumulación y la descomposición del follaje que mejora las condiciones del suelo. La guadua es la especie forestal con mayores posibilidades de suplir la demanda de especies maderables en la industria productora de pulpa, a menores costos.

También, en el campo de la construcción, la caña guadua, por sus propiedades físico-mecánicas que le confieren una extraordinaria resistencia, durabilidad y funcionalidad, es un material sobresaliente para la construcción habitacional. La multiplicidad de usos se revierte en beneficio de las economías locales de los lugares donde se desarrollan sus bosques, contribuyendo a mitigar la problemática socioeconómica del campo.

Tomado de http://recursosbiologicos.eia.edu.co/ecologia/estudiantes/guadua.htm

Dato curioso

Parque Simón Bolívar

El Parque Metropolitano Simón Bolívar se encuentra ubicado en el centro de Bogotá (Colombia) y está rodeado por algunas de las principales avenidas.

Es el parque más grande de Colombia en un área urbana.

El sistema consta de 400 hectáreas en calidad de espacios verdes y recreativos. Incluye los actuales parques “Los Novios”, “El Salitre”, “Museo de los Niños”, Unidad Deportiva, lagos artificiales y el edificio de Coldeportes Nacional, gracias a lo cual Bogotá cuenta hoy con un hermoso y amplio parque Metropolitano bautizado con el nombre de El Libertador.

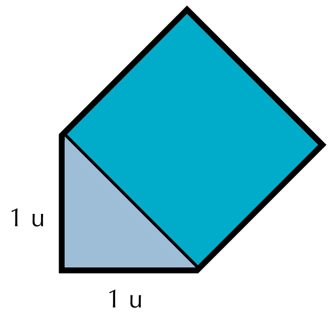
¿En qué vamos?

Coevaluación “Reflexiono y trabajo con mis compañeros”:

Copia en tu cuaderno los ejercicios siguientes y resuélvelos.

Luego compara con algunos de tus compañeros:

1. Según la figura dada:



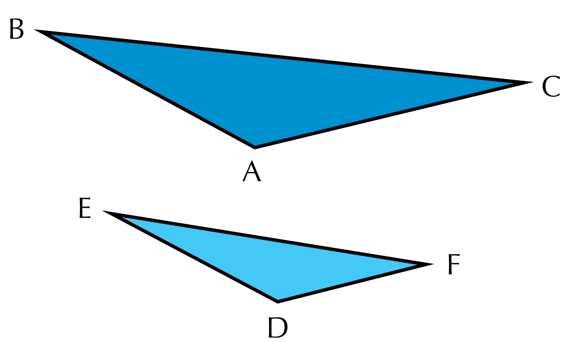
   a. ¿Cuál es el perímetro del cuadrado construido sobre la diagonal?
   b. ¿Cuál es la relación entre las áreas de los polígonos que componen la figura?

2. Un cuadrado tiene 144 cm2 de área. ¿Cuál es la medida del lado de otro cuadrado que tiene la cuarta parte de esa área?

3. Si $\frac{A_1}{A_2} = \frac{4\ cm^2}{16\ cm^2} = \frac{1}{4}$

   ¿Esta expresión qué quiere decir?

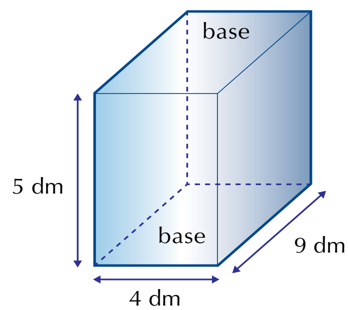
4. Verifica si los triángulos ABC y DEF son congruentes o son semejantes. Justifica tu respuesta.



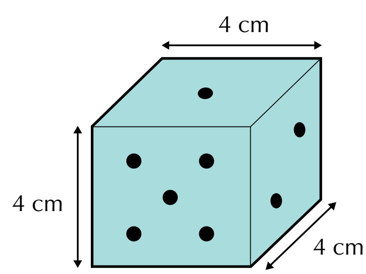
5. Construye la cuarta proporcional de los segmentos a, b y c, al saber que el ángulo del que se parte es de 30º y sus longitudes son:
   a = 2 cm
   b = 4 cm
   c = 3 cm

En los ejercicios 6, 7 y 8 debes calcular el área lateral de cada figura.

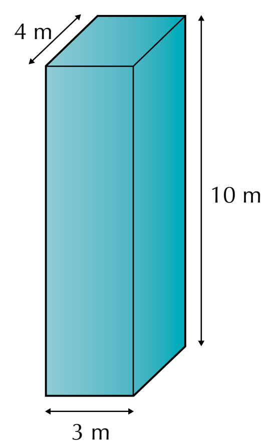
6.



7. Además, calcula el volumen del cubo:



8. Además, calcula el volumen del prisma:



9. Los catetos de un triángulo rectángulo miden 3 cm y 4 cm. Si se hace girar el triángulo sobre su cateto mayor:

   a. ¿Qué sólido genera?
   b. Calcula el volumen del cuerpo que se genera

10. Un tanque de almacenamiento de agua tiene forma de esfera y mide de diámetro 1 m. Calcula:

   a. Su área
   b. Su volumen

Heteroevaluación “Le cuento a mi profesor”

Con tu profesor, resuelve la siguiente rejilla.

Lee el enunciado y señala con una x la categoría correspondiente, según lo que has aprendido.

Qué sé hacer	Superior	Alto	Básico	Bajo
Comprendo la importancia de los teoremas básicos de la geometría.				
Identifico los criterios de semejanza entre triángulos.				
Identifico los criterios de congruencia entre triángulos.				
Resuelvo problemas sobre semejanza de triángulos.				
Resuelvo problemas sobre congruencia de triángulos.				
Aplico el teorema de Tales en la solución de problemas.				
Aplico el teorema de Pitágoras en la solución de problemas.				
Soluciono problemas que requieren calcular áreas laterales o totales de cubos.				
Soluciono problemas que requieren calcular áreas laterales o totales de prismas.				
Soluciono problemas que requieren calcular áreas laterales o totales de pirámides.				
Soluciono problemas que requieren calcular áreas laterales o totales de cilindros.				
Soluciono problemas que requieren calcular áreas laterales o totales de conos.				
Soluciono problemas que requieren calcular áreas laterales o totales de esferas.				
Calculo volúmenes de cubos.				
Calculo volúmenes de prismas.				
Calculo volúmenes de pirámides.				
Calculo volúmenes de cilindros.				
Calculo volúmenes de conos.				
Calculo volúmenes de esferas.				

Autoevaluación “Participo y aprendo”

Participo y aprendo	Superior	Alto	Básico	Bajo
Colaboro en la realización de las actividades.				
Participo en discusiones respetando las opiniones de los demás.				
Brindo apoyo en el trabajo en grupo.				
Aclaro dudas a mis compañeros.				
Contribuyo con la disciplina del curso.				
Asisto puntualmente al colegio.				
Me intereso por avanzar en mi aprendizaje.				
Propongo actividades para resolver en clase.				
Realizo las tareas en mi cuaderno.				
Reconozco la labor de mi profesor.				
Repaso en casa lo ejercitado en clase.				
Participo activamente en clase.				