educación de calidad
EL CAMINO PARA LA PROSPERIDAD

Grado 8º
Matemáticas

Ministerio de Educación Nacional
República de Colombia
Libertad y Orden

Secundaria Activa

Prosperidad para todos

Secundaria Activa
Matemáticas grado octavo

María Fernanda Campo Saavedra
Ministra de Educación Nacional

Mauricio Perfetti del Corral
Viceministro de Educación Preescolar, Básica y Media

Mónica López Castro
Directora de Calidad para la Educación Preescolar, Básica y Media

Heublyn Castro Valderrama
Subdirectora de Referentes y Evaluación para la Calidad Educativa
Coordinadora del proyecto

Clara Helena Agudelo Quintero
Gina Graciela Calderón Rodríguez
María del Sol Effio Jaimes
Omar Alejandro Hernández Salgado
Édgar Mauricio Martínez Camargo
Maritza Mosquera Escudero
Diego Fernando Pulecio Herrera
Equipo técnico

ISBN serie Secundaria Activa: 978-958-691-485-7
ISBN libro: 978-958-691-500-7

Dirección de Calidad para la Educación Preescolar, Básica y Media.
Subdirección de Referentes y Evaluación para la Calidad Educativa.
Ministerio de Educación Nacional, Bogotá, Colombia, 2012.

www.mineducacion.gov.co

Equipo de la actualización y cualificación del Modelo Educativo Secundaria Activa elaborado por:

AGUIRRE ASESORES S.A.S.

Eduardo Aguirre Dávila
Director de proyecto

Myriam Saavedra
Autora

Luz Marina Rincón Rojas
Coordinadora editorial

Ligia Flórez Bejarano
Coordinadora administrativa

Stefanie Vélez
Correctora de estilo

Julián Hernández
taller de diseño

Julián Ricardo Hernández Reyes - Pauta editorial y dirección de diseño
Walter Bolivar - Pauta editorial
Arnold Hernández - Pauta editorial
Freya Gil - Diagramación
Germán Piza - Diagramación
Jhon Cortés - Ilustración
Catalina Cardona - Ilustración
Diagramación, diseño e ilustración

Secundaria Activa es el resultado de la actualización y cualificación del modelo educativo Telesecundaria, en su versión colombiana (1999-2002), que a su vez fue adaptado de los módulos de Telesecundaria Mexicana por parte del Ministerio de Educación Nacional.

Esta actualización se hizo dentro del marco del contrato No. 428 de 2010, suscrito entre el Ministerio de Educación Nacional y Aguirre Asesores S.A.S., cuyos derechos fueron cedidos al Ministerio de Educación Nacional.

El Ministerio de Educación Nacional agradece a la Secretaría de Educación Pública de México (SEP) y al Instituto Latinoamericano para la Comunicación Educativa (ILCE) el apoyo técnico y la generosidad en la transmisión de los avances educativos y tecnológicos al Ministerio de Educación de Colombia, durante los años comprendidos entre 1999 y 2002.

Tabla de contenido

La educación es un derecho establecido en la Constitución Política de Colombia. En cumplimiento de ese mandato, el Ministerio de Educación ha diseñado y cualificado diferentes modelos educativos flexibles como alternativas a la oferta educativa tradicional, para responder a las características y necesidades particulares de los grupos poblacionales.

Es así como el Ministerio de Educación Nacional presenta el modelo educativo Secundaria Activa dirigido a los estudiantes de básica secundaria de las zonas rurales y urbanas marginales. Una alternativa de alta calidad, encaminada a disminuir las brechas en cuanto a permanencia y calidad en este nivel educativo.

La propuesta pedagógica de Secundaria Activa privilegia el aprendizaje mediante el saber hacer y el aprender a aprender. En procura de este objetivo, los textos están orientados al desarrollo de procesos relacionados con los saberes conceptuales, procedimentales y actitudinales que, de manera significativa y constructiva, van configurando las habilidades de los estudiantes para alcanzar el nivel de competencia esperado en cada grado.

Por esa razón, estos módulos de aprendizaje están diseñados sobre una ruta didáctica y editorial pensada para que los estudiantes, a partir del análisis e interpretación de diversas situaciones problema, puedan aproximarse a su realidad y a su cotidianidad, y le encuentren significado a los contenidos planteados.

Secundaria Activa cuenta entre sus componentes con módulos para los grados 6, 7, 8 y 9 de la básica secundaria, en las áreas de Matemáticas, Lenguaje, Ciencias Naturales y Educación Ambiental, Ciencias Sociales, Educación Ética y Valores Humanos, Educación Artística, Educación Física, Recreación y Deporte y orientaciones para la formulación e implementación de proyectos pedagógicos productivos.

Dispone también de un manual de implementación que ofrece indicaciones generales y pedagógicas sobre el modelo y, de guías para los docentes por cada área y grado, en las que encuentran orientaciones disciplinares y didácticas que apoyan su trabajo en el aula.

Esta propuesta es una oportunidad educativa para que muchos jóvenes puedan continuar sus estudios de básica secundaria y ampliar sus posibilidades de vida digna, productiva y responsable, como ciudadanos colombianos.

El modelo surgió del proceso de cualificación y adaptación de los módulos de Telesecundaria de México (1999-2002) para lograr la versión colombiana. El Ministerio de Educación Nacional de Colombia reitera su agradecimiento a la Secretaría Pública de México (SEP) y al Instituto Latinoamericano para la Comunidad Educativa (ILCE) por el apoyo técnico y la generosidad en la transmisión de los avances educativos y tecnológicos durante esos años.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL

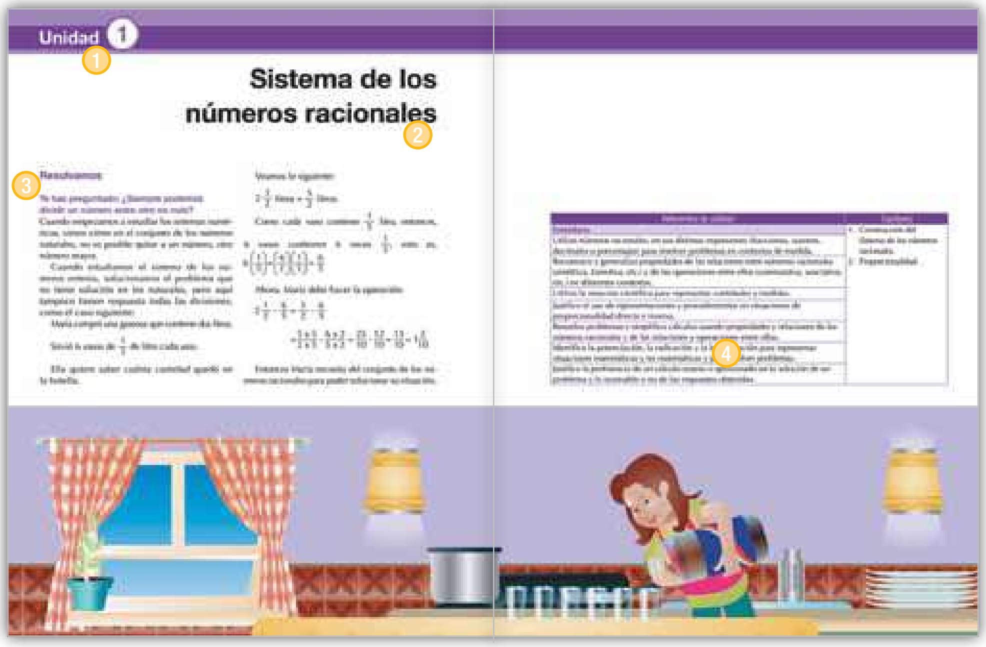
¿Cómo está compuesto el modelo Secundaria Activa?

El modelo Secundaria Activa contiene materiales educativos para siete áreas del conocimiento: Matemáticas, Ciencias Sociales, Lenguaje, Ciencias Naturales, Ética, Educación Física y Educación Artística. Además, presenta orientaciones para el desarrollo de Proyectos Pedagógicos Productivos en los establecimientos educativos en los que se implementa el modelo. Estas orientaciones están dirigidas a docentes y a estudiantes por conjuntos de grados.

Estos materiales están conformados por módulos para los estudiantes y guías didácticas para los docentes de cada grado.

¿Cómo son los módulos de los estudiantes?

Los módulos de aprendizaje son los documentos básicos de trabajo para el estudiante. En ellos se consignan los estándares básicos de competencias propias de cada área, así como los diferentes momentos para desarrollar y aplicar los conceptos y temas propuestos.
Cada módulo está compuesto por:

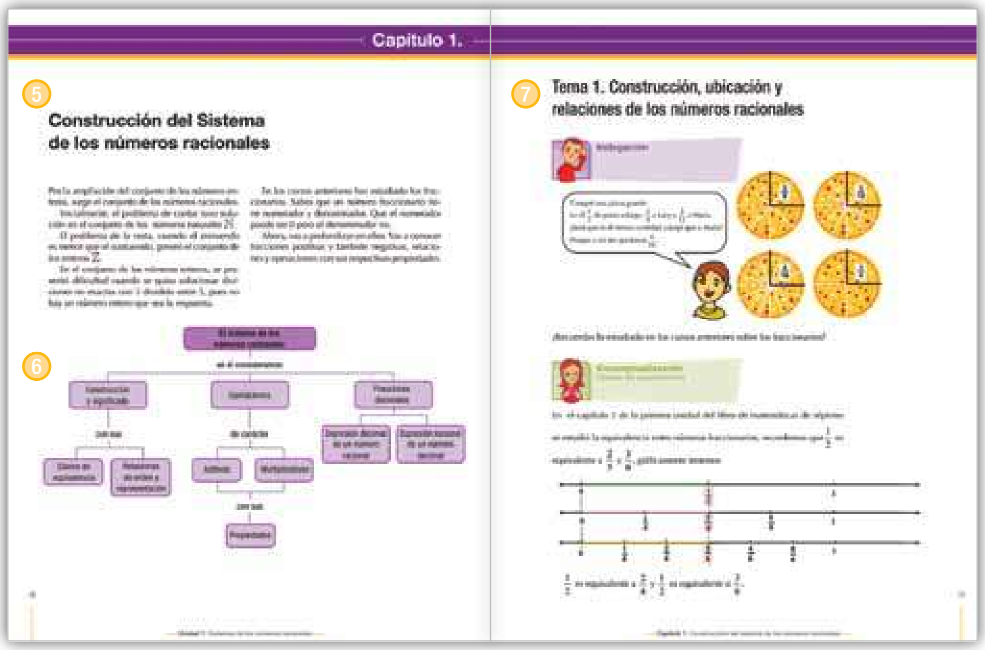


① Unidad
Es la sección mayor que reúne los capítulos y los temas. Son cuatro unidades por cada módulo para las áreas básicas (Lenguaje, Matemáticas, Ciencias Sociales, Ciencias Naturales, Ética y Valores y Educación Física).

② Título
Es la presentación de la unidad de manera motivadora. Este título alude a la situación general que se trabajará en la unidad y guarda relación con las competencias propuestas por el MEN.

③ Resolvamos
Presenta una situación problemática de la vida cotidiana, la cual requiere el ejercicio de diferentes acciones de pensamiento como argumentar, discutir, explicar, debatir, indagar o proponer. Esta situación contextualiza al estudiante con los desarrollos básicos de la unidad y procura desequilibrios conceptuales que motiven al estudiante a encontrar soluciones. La situación planteada se acompaña de preguntas hipotéticas.

④ Referentes de calidad y capítulos
De manera enunciativa, exponen los estándares básicos de competencia y actividades que se desarrollarán en los capítulos.



⑤ Capítulo

Corresponde a cada una de las divisiones de la unidad y se refieren a los lineamientos o ejes articulares de cada área.

⑥ Organizador gráfico

Muestra de manera sucinta y gráfica los principales elementos que se tratan en el capítulo y se convierte en un indicativo del derrotero y la interrelación de los elementos tratados.

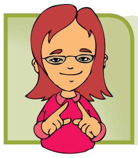
⑦ Tema

Son las partes en que se dividen los capítulos. Cada tema se compone de los siguientes momentos:

- Indagación
- Conceptualización
- Aplicación

Indagación

El propósito de este primer momento es acercar a los estudiantes a la temática mediante actividades previas como la presentación de situaciones, textos, material gráfico y actividades, que por su atractivo motivan a los jóvenes y con ello establece un primer acercamiento a los contenidos que se abordan. Igualmente, pretende indagar por los saberes previos que traen los estudiantes, a través de situaciones variadas.



Conceptualización

En este segundo momento confluyen diversas experiencias de aprendizaje que buscan la comprensión de los contenidos a través de lecturas y diversas actividades cognitivas. Los contenidos se elaboran de acuerdo con el desarrollo cognitivo de los estudiantes de cada grado, lo que implica una adecuada selección de los mismos y su profundidad, presentación y lenguaje adecuado. A la par de los contenidos, existen herramientas cognitivas que acompañan los contenidos conceptuales para favorecer su comprensión; por esto se presentan con subtítulos como ubicar, identificar, analizar, comparar, explicar, clasificar, inferir, transferir, aplicar, predecir, comunicar, entre otros.

Aplicación

Este tercer momento tiene por objeto trabajar las habilidades propias que desarrolla el área. Por ello, las actividades que se realizan enfrentan al estudiante a una situación real o de contexto para que logren un aprendizaje significativo.

Secciones flotantes

Dentro de los temas también se encuentran unas secciones flotantes que tienen el propósito de dinamizar los contenidos, presentando información que amplía o se relaciona con el concepto trabajado. Todas las áreas comparten la sección *Entendemos por*, en la que se presentan las definiciones de los conceptos clave. Las otras secciones están definidas en particular para cada una de las áreas.

Aplico mis conocimientos

Esta sección se presenta a lo largo del momento de la conceptualización. Es un espacio que consta de actividades de aprendizaje que acompañan los contenidos conceptuales para favorecer su comprensión.

Entendemos por…

En este ladillo se incluyen las definiciones de los conceptos clave. El propósito de esta sección es enriquecer el léxico del estudiante.

Diversión matemática

Es airear el tema con algún acertijo o juego relacionado con el tema.

Día a día

Aquí se trata de un texto en el que se relacionado la temática que se va desarrollando con aspectos de la vida diaria, con los que se relaciona el estudiante en su diario vivir, de tal manera que se evidencia como el conocimiento de la escuela tiene relación con la cotidianidad y por lo tanto es significativo.

Cierre de capítulo

Al finalizar, cada capítulo ofrece:

8 Este capítulo fue clave porque

Presenta al estudiante una síntesis de los temas desarrollados durante el capítulo, para lo cual destaca su importancia y aplicabilidad.

9 Conectémonos con

Propone información que evidencia la relación de los contenidos básicos tratados con los de otras áreas de estudio y con las habilidades que estos puedan desarrollar.

Cierre de unidad

Cada una de las unidades presenta al final:

10 Repasemos lo visto

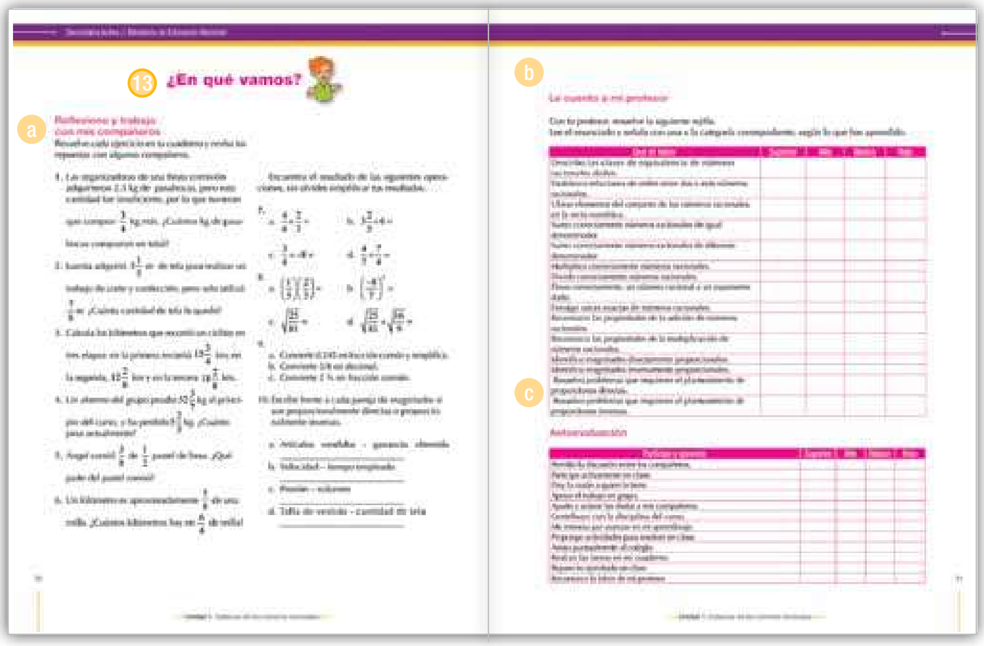
Es la síntesis de la unidad y la conclusión de la situación problema.

11 Mundo rural

Esta sección aprovecha el tema trabajado en la unidad, para relacionarlo con la vida del campo, de tal forma que los conceptos que se desarrollan contribuyan a la comprensión de fenómenos sociales y naturales rurales: ambiente, procesos productivos, organización comunitaria, paisaje, entre otros.

12 Dato curioso

Presenta información relacionada con aspectos como interpretación del tema por sujetos del pasado o aplicaciones tecnológicas en diferentes épocas, con la intención de motivar al estudiante, presentando la manera como los conceptos, las habilidades y los valores desarrollados por el género humano, en algunas oportunidades puede sorprender.



13 ¿En qué vamos?

Corresponde a los procesos de valoración del aprendizaje y evalúa si los aprendizajes de los estudiantes son significativos. También se busca que el estudiante sea responsable y controle su proceso de aprendizaje, es decir, su habilidad de autorregulación.

Esta sección está conformada por tres ejes:

a *Coevaluación.* Se presenta en la sección de *Reflexiono y trabajo con mis compañeros*, en la cual se mide la aprehensión de los conceptos, competencias y procedimientos esenciales a manera de aprendizaje colaborativo. El objetivo de esta sección es que el estudiante se vea frente a sus pares y los reconozca como interlocutores válidos. A este respecto, el estudiante podrá comparar sus respuestas con las de sus compañeros.

b *Heteroevaluación.* En el apartado titulado *Le cuento a mi profesor,* se establece un diálogo entre el docente y el estudiante para medir los alcances y logros especialmente de carácter procedimental (saber hacer) de las competencias, por medio de matrices que estipulan los criterios de calidad básicos de la unidad. Las matrices se ajustan desde los enunciados o metas de desarrollo y los criterios propios del Decreto 1290 de 2009.

c *Autoevaluación*. Corresponde a la sección *Participo y aprendo*, franja que cierra el proceso de valoración con una matriz en donde el estudiante se evalúa. Igualmente, esta sección permitirá establecer los procesos de mejoramiento para las unidades subsiguientes.

Sistema de los números racionales

Resolvamos

Te has preguntado: ¿Siempre podemos dividir un número entre otro no nulo?

Cuando empezamos a estudiar los sistemas numéricos, vimos cómo en el conjunto de los números naturales, no es posible quitar a un número, otro número mayor.

Cuando estudiamos el sistema de los números enteros, solucionamos el problema que no tiene solución en los naturales, pero aquí tampoco tienen respuesta todas las divisiones, como el caso siguiente:

María compró una gaseosa que contiene dos litros.

Sirvió 6 vasos de $\frac{1}{5}$ de litro cada uno.

Ella quiere saber cuánta cantidad quedó en la botella.

Veamos lo siguiente:

$2\frac{1}{2}$ litros $= \frac{5}{2}$ litros.

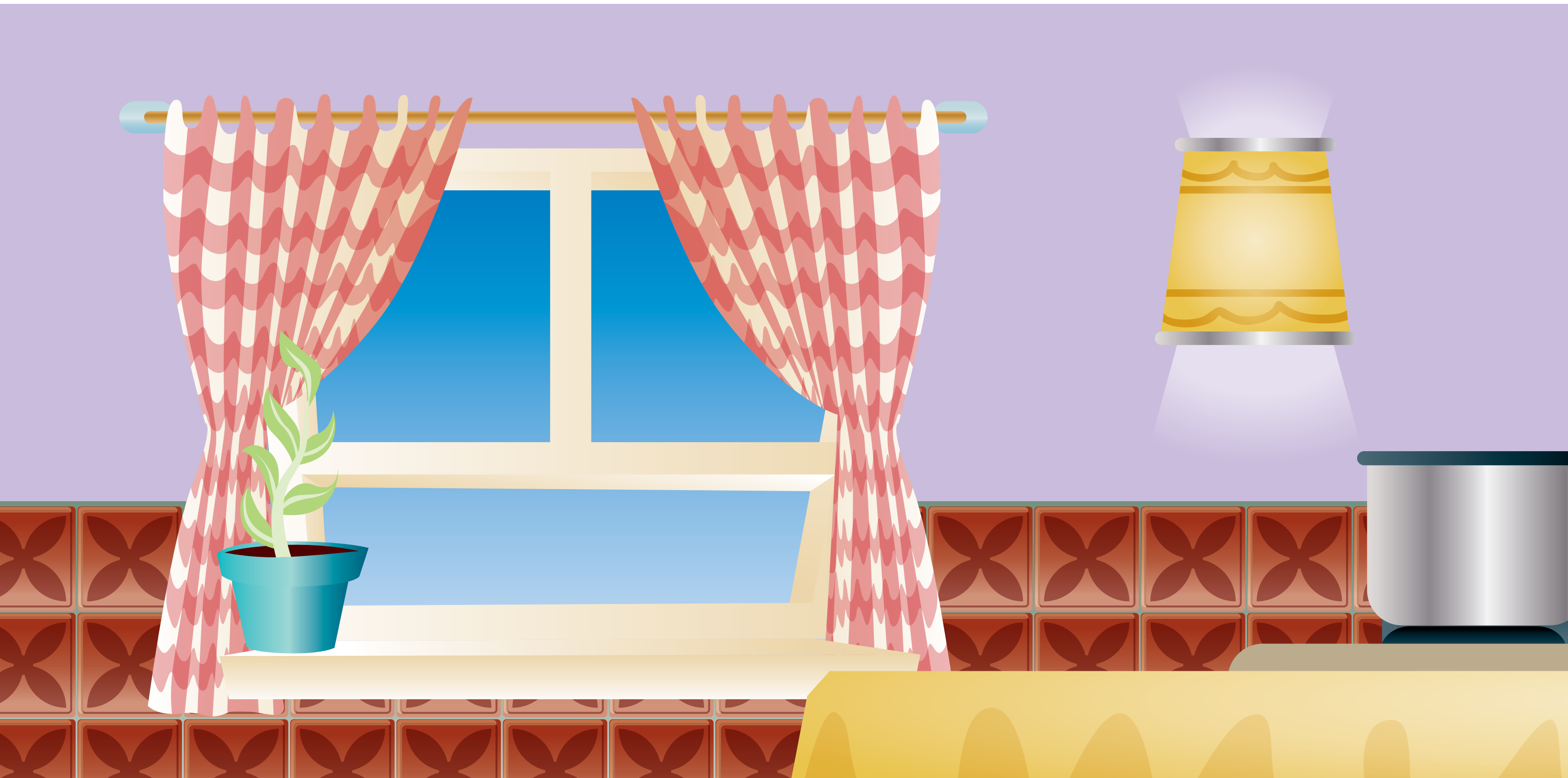
Como cada vaso contiene $\frac{1}{5}$ litro, entonces, 6 vasos contienen 6 veces $\frac{1}{5}$, esto es, $6\left(\frac{1}{5}\right)=\left(\frac{6}{1}\right)\left(\frac{1}{5}\right)=\frac{6}{5}$

Ahora, María debe hacer la operación:

$$2\frac{1}{2}-\frac{6}{5}=\frac{5}{2}-\frac{6}{5}$$

$$=\frac{5 \times 5}{2 \times 5}-\frac{6 \times 2}{5 \times 2}=\frac{25}{10}-\frac{12}{10}=\frac{13}{10}=1\frac{3}{10}$$

Entonces María necesita del conjunto de los números racionales para poder solucionar su situación.



Referentes de calidad	Capítulos
Estándares	1. Construcción del Sistema de los números racionales. 2. Proporcionalidad.
Utilizo números racionales, en sus distintas expresiones (fracciones, razones, decimales o porcentajes) para resolver problemas en contextos de medida.	
Reconozco y generalizo propiedades de las relaciones entre números racionales (simétrica, transitiva, etc.) y de las operaciones entre ellos (conmutativa, asociativa, etc.) en diferentes contextos.	
Utilizo la notación científica para representar cantidades y medidas.	
Justifico el uso de representaciones y procedimientos en situaciones de proporcionalidad directa e inversa.	
Resuelvo problemas y simplifico cálculos usando propiedades y relaciones de los números racionales y de las relaciones y operaciones entre ellos.	
Identifico la potenciación, la radicación y la logaritmación para representar situaciones matemáticas y no matemáticas y para resolver problemas.	
Justifico la pertinencia de un cálculo exacto o aproximado en la solución de un problema y lo razonable o no de las respuestas obtenidas.	

Construcción del Sistema de los números racionales

Por la ampliación del conjunto de los números enteros, surge el conjunto de los números racionales.

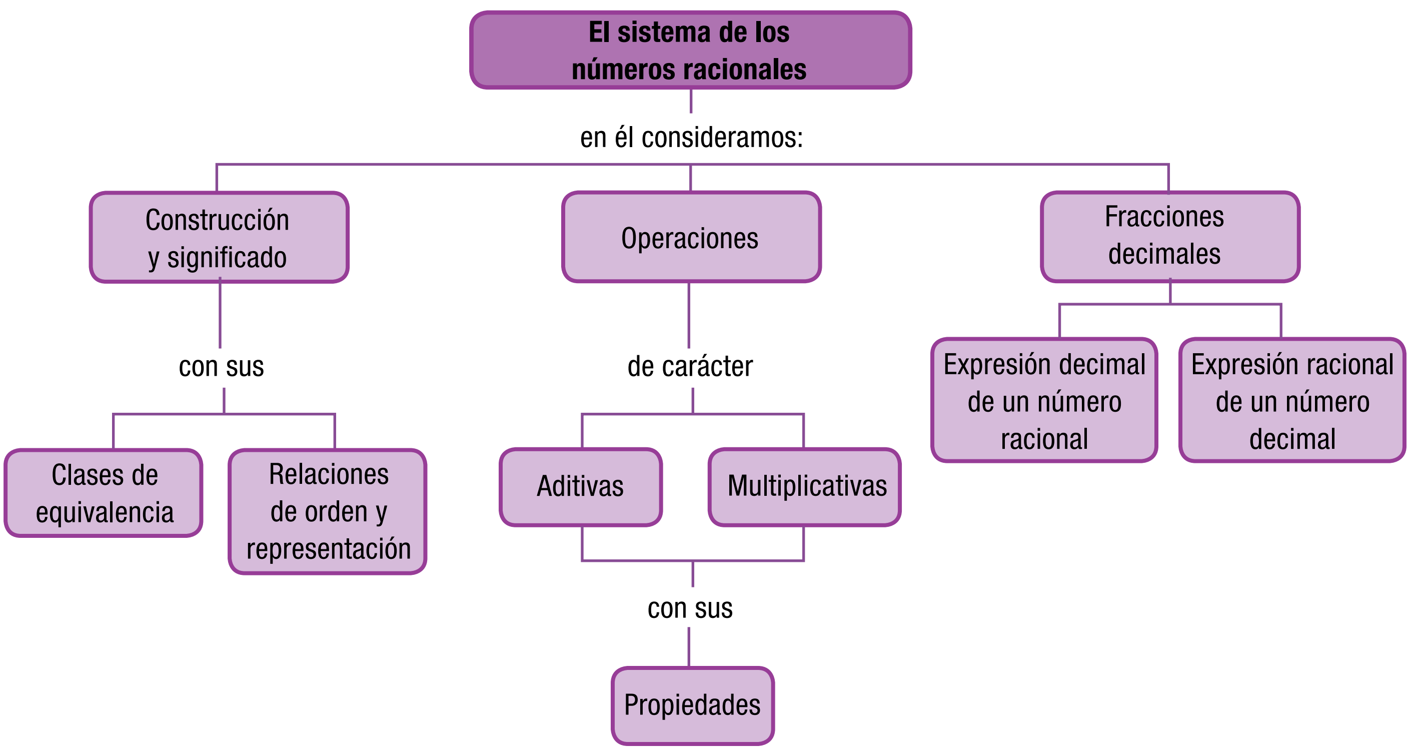
Inicialmente, el problema de contar tuvo solución en el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$.

El problema de la resta, cuando el minuendo es menor que el sustraendo, generó el conjunto de los enteros $\mathbb{Z}$.

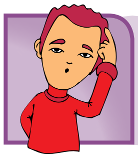
En el conjunto de los números enteros, se presentó dificultad cuando se quiso solucionar divisiones no exactas con 3 dividido entre 5, pues no hay un número entero que sea la respuesta.

En los cursos anteriores has estudiado los fraccionarios. Sabes que un número fraccionario tiene numerador y denominador. Que el numerador puede ser 0 pero el denominador no.

Ahora, vas a profundizar en ellos. Vas a conocer fracciones positivas y también negativas, relaciones y operaciones con sus respectivas propiedades.



Tema 1. Construcción, ubicación y relaciones de los números racionales



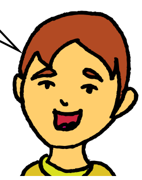
Indagación

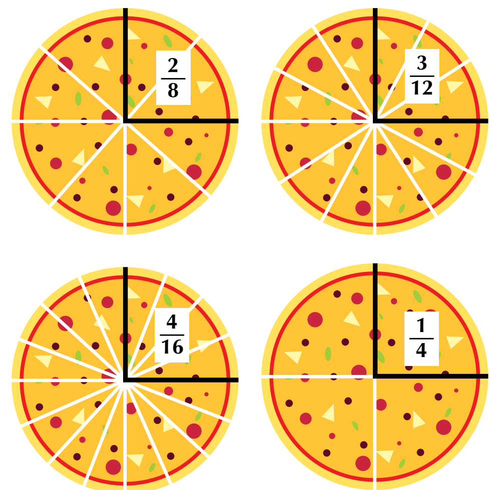
Compré una pizza grande.

Le dí $\frac{1}{4}$ de pizza a Jorge, $\frac{2}{8}$ a Lucy y $\frac{3}{12}$ a María.

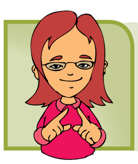
¿Será qué le dí menos cantidad a Jorge que a María?

Porque a mi me quedaron $\frac{4}{16}$





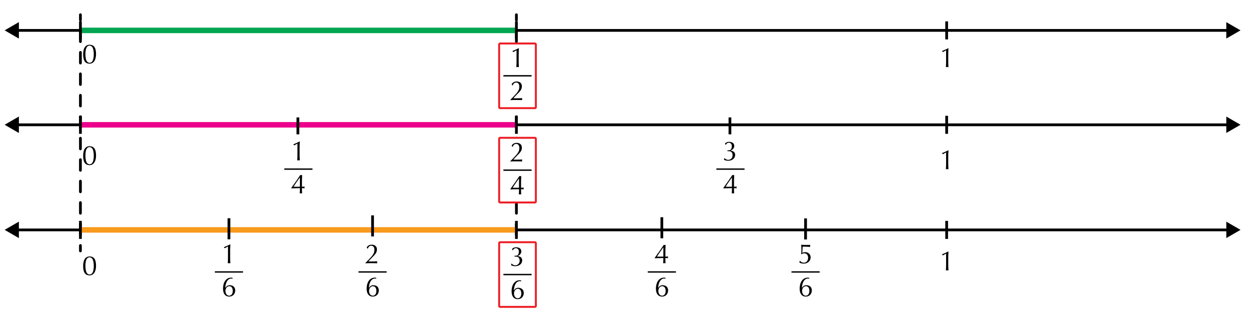
¿Recuerdas lo estudiado en los cursos anteriores sobre los fraccionarios?



Conceptualización

Clases de equivalencia

En el capítulo 2 de la primera unidad del libro de matemáticas de séptimo se estudió la equivalencia entre números fraccionarios, recordemos que $\frac{1}{2}$ es equivalente a $\frac{4}{5}$ y $\frac{3}{6}$, gráficamente tenemos



$\frac{1}{2}$ es equivalente a $\frac{2}{4}$ y $\frac{1}{2}$ es equivalente a $\frac{3}{6}$.

Observa que el tamaño del segmento de color verde es igual al tamaño del segmento de color rosado e igual al tamaño del segmento de color anaranjado.

$\frac{1}{2}$ es un fraccionario irreducible equivalente a $\frac{2}{4}$ y a $\frac{3}{6}$.

Escribe otros tres números fraccionarios equivalentes a $\frac{1}{2}$.

¿Cuántos números fraccionarios equivalentes a $\frac{1}{2}$ hay en total?

El conjunto de todos los números fraccionarios equivalentes a $\frac{1}{2}$ se llama clase de equivalencia de $\frac{1}{2}$, es decir, que el conjunto $\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \ldots\right\}$ representa la clase de equivalencia de $\frac{1}{2}$.

$\frac{1}{2}$ es llamado el ***representante canónico*** de la clase de equivalencia

$$\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \ldots\right\}.$$

La clase de equivalencia representada por $\frac{1}{3}$ o que tiene como representante canónico a $\frac{1}{3}$ es $\left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{6}, \frac{3}{9}, \frac{4}{12}, \ldots\right\}$.

¿Cuál es la clase de equivalencia representada por $\frac{1}{4}$ o que tiene como representante canónico a $\frac{1}{4}$?

Cada representante canónico tiene un conjunto de fraccionarios equivalentes que forman la clase de equivalencia.
El conjunto de todas las clases de equivalencia forman el conjunto de los números racionales ($\mathbb{Q}$).

Los números enteros pueden escribirse como números racionales asignándoles por denominador 1.
Por ejemplo: La construcción de los números racionales la realizamos mediante la relación de equivalencia.

Conoces números fraccionarios menores que la unidad, como:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{6}{7}, \frac{8}{10}, \text{ etc.}$$

También hay mayores que uno. Equivalen a varias unidades completas más una fracción de unidad: $\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}$; $\frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3}$; $\frac{42}{10} = 4 + \frac{1}{5}$

Por último, tenemos los fraccionarios negativos que podemos representar con fracciones precedidas del signo menos (-). Por ejemplo:

$$-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{4},\ -\frac{3}{2},\ -\frac{7}{3}$$

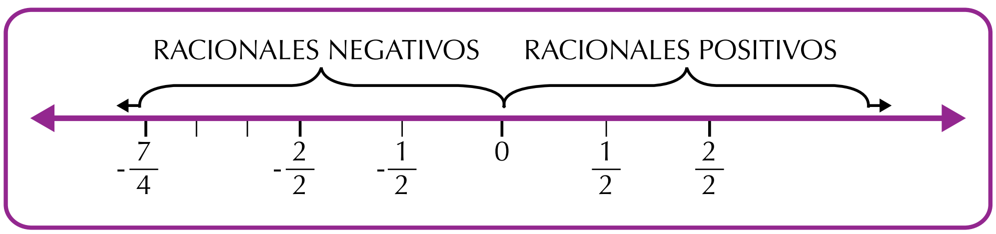
4 es un número entero positivo, 4 puede escribirse como $\frac{4}{1}$ o que tiene como representante canónico a $\frac{4}{1}$.

-7 es otro número entero negativo, -7 puede escribirse como $\frac{-7}{1}$.

La recta numérica y los números racionales

Los números racionales se localizan en la recta numérica a ambos lados del cero: a la derecha los racionales positivos y a la izquierda los racionales negativos.

Conjunto de los números racionales: $\mathbb{Q}$



En la figura anterior se han ubicado los números racionales

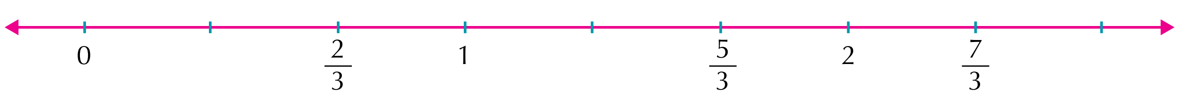
$$\frac{-7}{4},\ \frac{-2}{2},\ \frac{-1}{1},\ \frac{1}{2}\ \text{y}\ \frac{2}{2}.$$

Cualquier número racional puede ubicarse en la recta numérica. Además, entre dos números racionales, siempre hay otro número racional. A esta propiedad se le llama densidad del conjunto de los racionales.

Relaciones de orden y representación

Representemos en la recta numérica los números racionales siguientes:

$$\frac{2}{3},\ \frac{5}{3}\ \text{y}\ \frac{7}{3}.$$



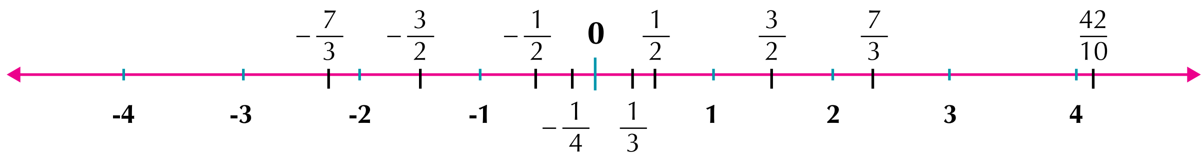
En la recta tenemos el número racional $\frac{2}{3}$ ubicado a la izquierda de $\frac{5}{3}$, por lo tanto $\frac{2}{3}$ es menor que $\frac{5}{3}$, simbólicamente se escribe así: $\frac{2}{3} < \frac{5}{3}$.

El número racional $\frac{7}{3}$ está ubicado a la derecha del número racional $\frac{5}{3}$, por lo tanto $\frac{7}{3}$ es mayor que $\frac{5}{3}$, simbólicamente se escribe así: $\frac{7}{3} > \frac{5}{3}$.

Observando en la gráfica los números racionales $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{3}$ y $\frac{7}{3}$ vemos que $\frac{2}{3} < \frac{5}{3} < \frac{7}{3}$ o también $\frac{7}{3} > \frac{5}{3} > \frac{2}{3}$.

Los números racionales positivos se encuentran ubicados en la recta numérica a la derecha del cero y los números racionales negativos se encuentran ubicados a la izquierda del cero.

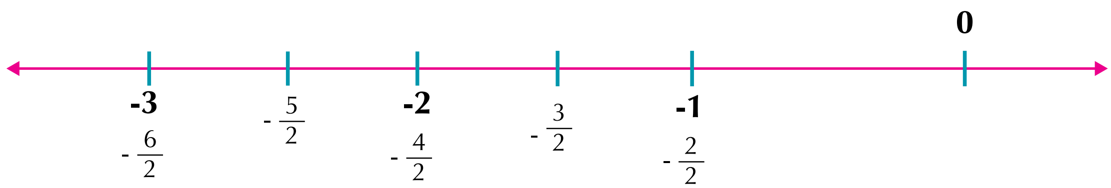
RACIONALES NEGATIVOS **RACIONALES POSITIVOS**



Para comparar dos números racionales de una manera no gráfica, se observan los denominadores, los numeradores y los signos de las fracciones, atendiendo a los siguientes criterios:

a. Tienen el mismo denominador.

Ejemplo: $\frac{-5}{2}$ y $\frac{-3}{2}$ se comparan los numeradores -5 < -3.



Luego $\frac{-5}{2} < \frac{-3}{2}$.

De dos números racionales que tienen denominadores iguales, es mayor el que tiene mayor numerador.

b. Tienen diferente denominador.

Ejemplo: De los números racionales $\frac{10}{7}$ y $\frac{4}{5}$, ¿cuál es mayor?

Primero los convertimos a un común denominador y luego los comparamos como en el caso a).

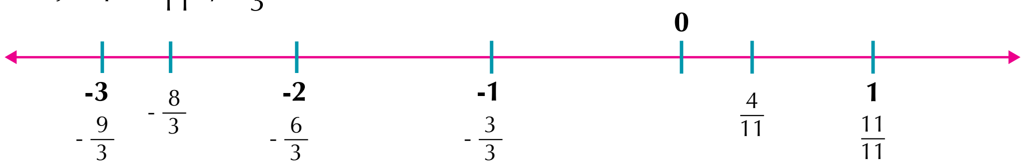
$\frac{10}{7} \times \frac{5}{5} = \frac{50}{35}$, entonces $\frac{10}{7}$ es equivalente a $\frac{50}{35}$ y $\frac{4}{5} \times \frac{7}{7} = \frac{28}{35}$, entonces $\frac{4}{5}$ es equivalente a $\frac{28}{35}$.

Comparando tenemos que $\frac{50}{35} > \frac{28}{35}$, entonces $\frac{10}{7} > \frac{4}{5}$.

Si dos números racionales tienen denominadores diferentes, se buscan fracciones equivalentes con el mismo denominador y luego se comparan.

c. Tienen signos diferentes.

Ejemplo: $\frac{4}{11}$ y $\frac{-8}{3}$.



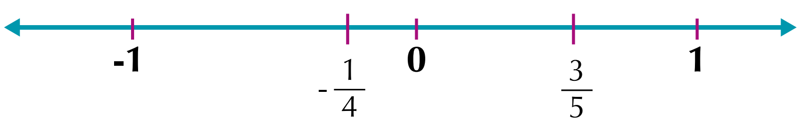
Siempre en número positivo es mayor otro negativo, entonces, $\frac{4}{11} > \frac{-8}{3}$.

Si dos números racionales tienen signos diferentes, es mayor el número racional que tenga signo positivo.

Otros criterios de comparación entre dos números racionales son:

d. Entre un racional positivo y un racional negativo.

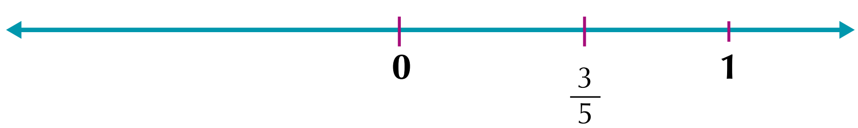
Por Ejemplo: Si se tienen $\frac{3}{5}$ y $-\frac{1}{4}$, entonces, $\frac{3}{5} > -\frac{1}{4}$.



De dos números racionales, uno positivo y otro negativo, el mayor será siempre el positivo.

e. Entre un racional positivo y el cero.

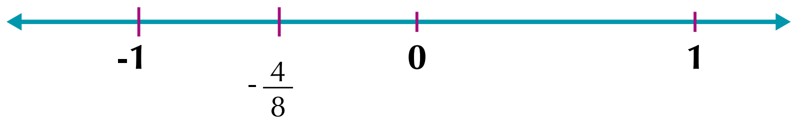
Por Ejemplo: Si se tienen $\frac{3}{5}$ y 0, entonces, $\frac{3}{5} > 0$.



Entre un número racional positivo y el cero, es mayor el número racional positivo.

f. Entre un racional negativo y el cero.

Ejemplos: Dados: $-\frac{4}{8}$ y 0, $-\frac{4}{8} < 0$.



Entre un racional negativo y el cero, es mayor el cero.

También podemos averiguar cuál de dos números racionales dados es mayor, aplicando el procedimiento de los productos cruzados ya estudiados en cursos anteriores, además de la conversión a común denominador.

Analicemos los ejemplos siguientes:

1. Comparemos los números racionales $\frac{4}{5}$ y $\frac{2}{3}$ que tienen diferente denominador (5 y 3).
   Para convertir a común denominador, utilizamos la amplificación o la simplificación.
   En este caso amplificamos.

   $\frac{4}{5}$ y $\frac{2}{3}$, un común denominador es 15,

   $$\frac{4}{5} = \frac{4 \times 3}{5 \times 3} = \frac{12}{15} \quad \text{y} \quad \frac{2}{3} = \frac{2 \times 5}{3 \times 5} = \frac{10}{15} \quad \text{de donde} \quad \frac{4}{5} > \frac{2}{3}$$

   Realizando los productos cruzados tenemos:

   $$12 \quad \frac{4}{5} \quad \frac{2}{3} \quad 10$$

   entonces $\frac{4}{5} > \frac{2}{3}$.

2. Comparemos $\frac{3}{5}$ y $\frac{6}{10}$ por productos cruzados:

   $$30 \quad \frac{3}{5} \quad \frac{6}{10} \quad 30$$

   entonces $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$.

3. Entre $\frac{-6}{8}$ y $\frac{-3}{6}$, ¿cuál es menor?

   $$-36 \quad -\frac{6}{8} \quad -\frac{3}{6} \quad -24$$

   entonces $\frac{-6}{8} < \frac{-3}{6}$.

4. De $-\frac{1}{2}$ y $-\frac{3}{5}$, ¿cuál es mayor?

$$-5 \leftarrow -\frac{1}{2} \times -\frac{3}{5} \rightarrow -6$$

entonces $-\frac{1}{2} > -\frac{3}{5}$.

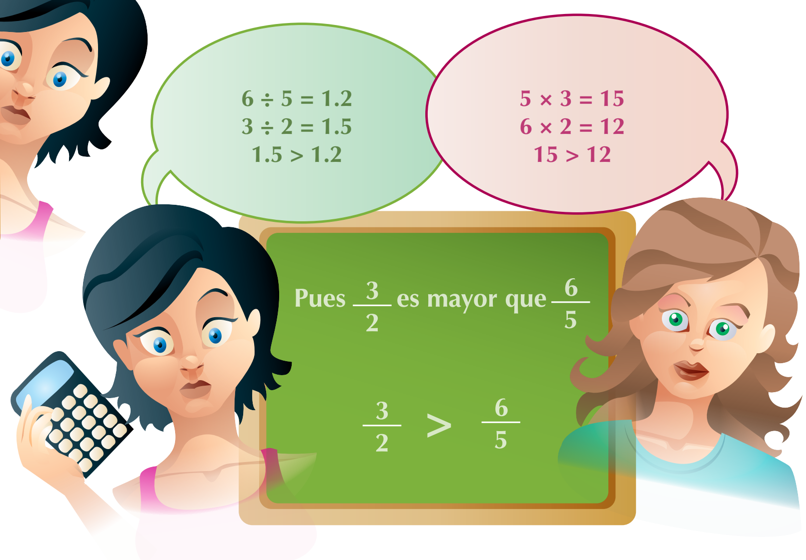
Aplicación

En tu cuaderno, escribe los ejercicios siguientes, resuélvelos y revisa tus respuestas, con algunos compañeros.

1. En tu cuaderno copia la lista siguiente de números e identifica el número que no es racional.

$-\frac{3}{8}$ $\quad\sqrt{4}\quad$ 2.7512512... $\quad\sqrt{-2}\quad$ 0 $\quad$ 3.541

2. Cata y Luisa están comparando los números racionales $\frac{3}{2}$ y $\frac{6}{5}$, ¿cuál procedimiento consideras tú es más fácil? ¿Por qué?



3. Entre los números racionales de la derecha, encuentra los que sean equivalentes al número racional que está encerrado en el círculo de la izquierda. Explica cómo encontraste las fracciones equivalentes.

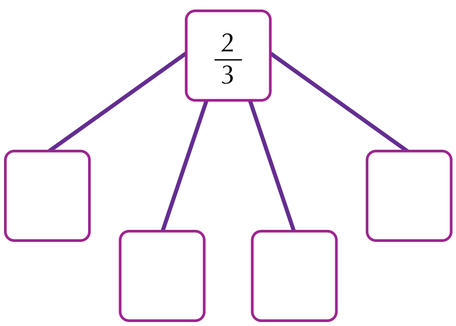
a. $\frac{1}{3}$ $\quad \frac{2}{3}, \quad \frac{2}{6}, \quad \frac{4}{10}, \quad -\frac{3}{9}, \quad \frac{4}{12}$

b. $-\frac{3}{5}$ $\quad -\frac{6}{10}, \quad -\frac{2}{3}, \quad -\frac{9}{15}, \quad -\frac{15}{25}, \quad -\frac{12}{20}$

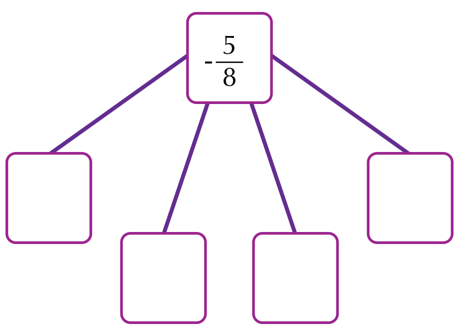
c. $\frac{2}{4}$ $\quad \frac{1}{2}, \quad \frac{3}{4}, \quad \frac{3}{6}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{4}{8}$

En cada cuadro escribe un número racional equivalente al racional dado. Explica el procedimiento utilizado en cada uno.

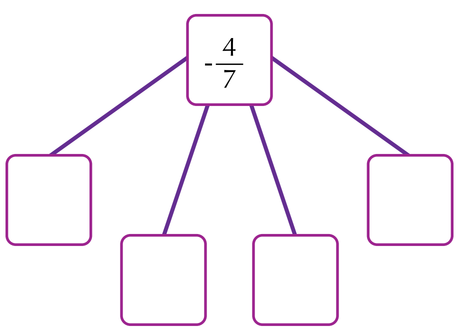
4.



5.



6.



7. A Joaquín le corresponde $\frac{7}{9}$ de una finca y Pedro es dueño de los $\frac{9}{11}$ de otra finca. Si las dos fincas tienen la misma extensión, ¿cuál de los dos tiene más terreno?

8. Escribe en el cuadro la relación de orden correspondiente (<, >, =)

a. $\frac{4}{5} \;\square\; -\frac{2}{3}$

b. $\frac{-1}{2} \;\square\; \frac{1}{3}$

c. $\frac{3}{8} \;\square\; \frac{0}{6}$

d. $\frac{5}{8} \;\square\; \frac{4}{6}$

e. $\frac{0}{9} \;\square\; \frac{4}{5}$

f. $-\frac{3}{5} \;\square\; -\frac{7}{9}$

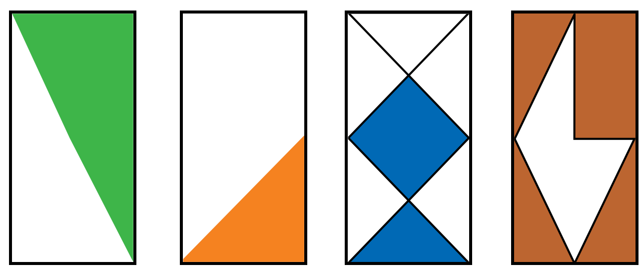
9. Escribe el representante canónico de las siguientes clases de equivalencia:

a. $\left\{\frac{1}{7}, \frac{2}{14}, \frac{3}{21}, \frac{4}{28}, \frac{5}{35}, \ldots\right\}$

b. $\left\{\ldots \frac{-3}{27}, \frac{-2}{18}, \frac{-1}{9}\right\}$

c. $\left\{\frac{-2}{10}, \frac{-1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{2}{10} \ldots\right\}$

10. Pedro quiere escribir los números racionales que representan estas cuatro figuras y ordenarlos de mayor a menor. Por favor ayúdale. ¿Recuerdas las operaciones con fraccionarios que realizabas en los cursos anteriores?



Entendemos por...

Tricotomía los tres posibles casos de relación que pueden ocurrir al comparar dos elementos a, b de un conjunto dado.

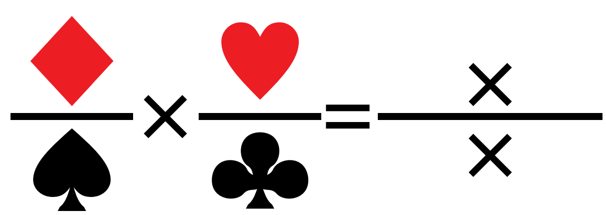
Estos son: $a < b$; $a = b$ o $a > b$.

Por ejemplo, dados los números racionales $\frac{0}{7}, \frac{1}{5}$ y $\frac{5}{3}$ establecemos entre cada dos de ellos lo siguiente:

$$\frac{0}{7} < \frac{1}{5} \qquad \frac{5}{3} < \frac{1}{5} \qquad \frac{5}{3} = \frac{5}{3}.$$

Diversión matemática

A un niño se le ocurrió plantear la multiplicación siguiente. ¿Podrías ayudarle a terminarla?

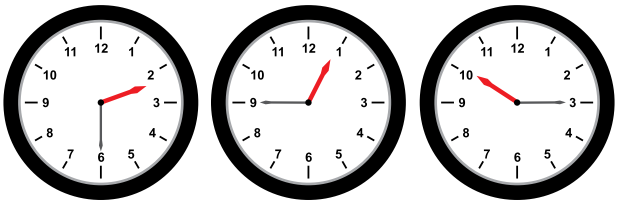


Día a día

La hora en los diferentes países del mundo

Desde muy niños aprendemos a leer la hora en los relojes.
Es común escuchar expresiones como: “son las 7 menos cuarto”, para indicar las 6 y 45.

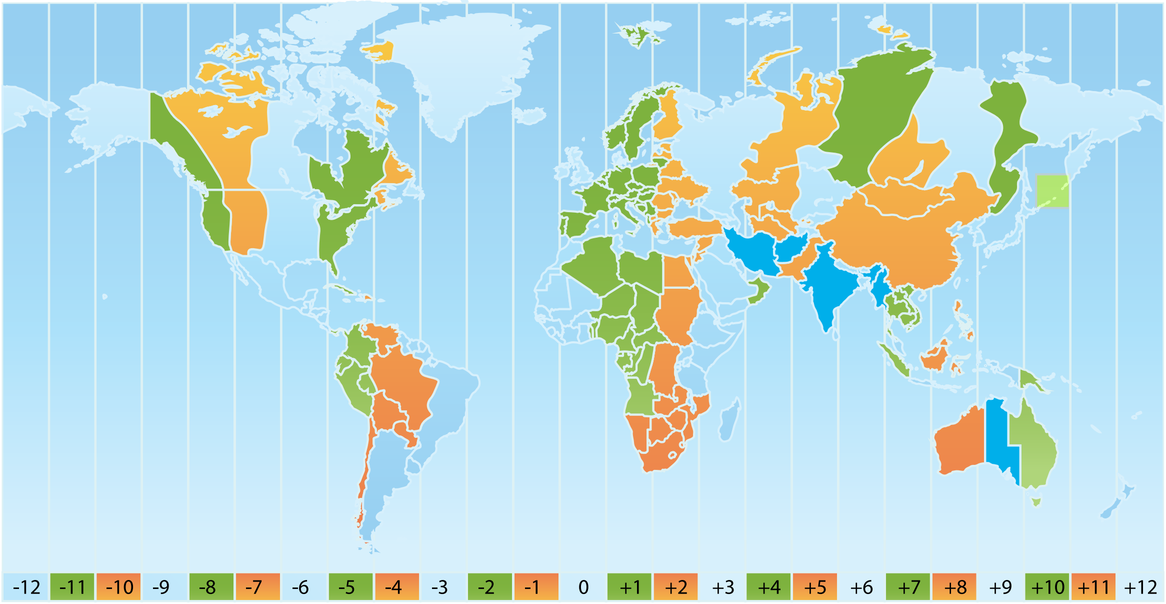
“Las 3 y $\frac{1}{2}$” para indicar las 3 horas y treinta minutos.



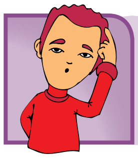
La hora en diferentes puntos de la Tierra o ciudades del mundo

Cuando en Bogotá, Colombia, falta $\frac{1}{4}$ para las 8 de la mañana, en Buenos Aires, Argentina, falta $\frac{1}{4}$ para las 10 de la mañana, en Roma, Italia, falta $\frac{1}{4}$ para las 2 de la tarde; en Ciudad del Cabo, África, falta $\frac{1}{4}$ para las 3 de la tarde; en Tokio, Japón, falta $\frac{1}{4}$ para las 10 de la noche.

Tomado de http://www.rumbo.com/

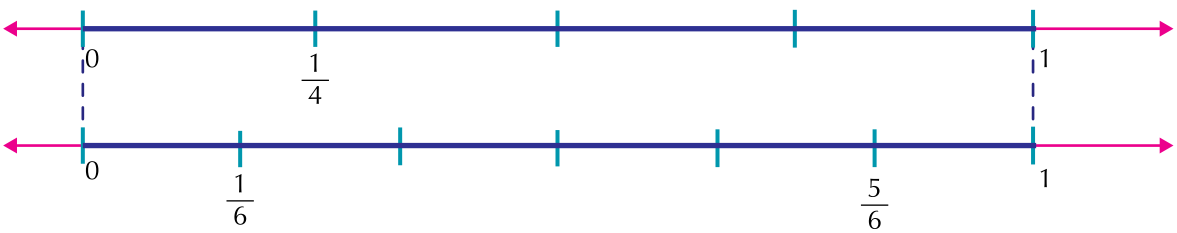


Tema 2. Operaciones entre números racionales y sus propiedades

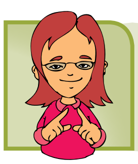


Indagación

1. La situación siguiente, tiene dos soluciones: una grafica y una solución numérica.
   Realiza la operación: $\frac{1}{6} + \frac{1}{4} - \frac{5}{6}$



Encuentra la solución y compara tus respuestas con algunos compañeros. Al presentarse el problema de sumar o restar fracciones con diferente denominador, es conveniente emplear el mínimo común múltiplo de los denominadores.



Conceptualización

Adición o suma de números racionales

Analicemos las situaciones siguientes:

1. Realicemos $\frac{4}{9} + \frac{5}{6} =$

   Se halla el mínimo común múltiplo (m.c.m.) de los denominadores:

$$\left.\begin{array}{cc|c} 9 & 6 & 2 \\ 9 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & & \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} 2 \text{ x } 3 \text{ x } 3 = 18 \\ \\ \text{El m.c.m. de 9 y 6 es 18} \end{array}$$

Se buscan números racionales equivalentes, amplificando los números racionales $\frac{4}{9}$ y $\frac{5}{6}$ de tal manera que sus denominadores sean 18, así:

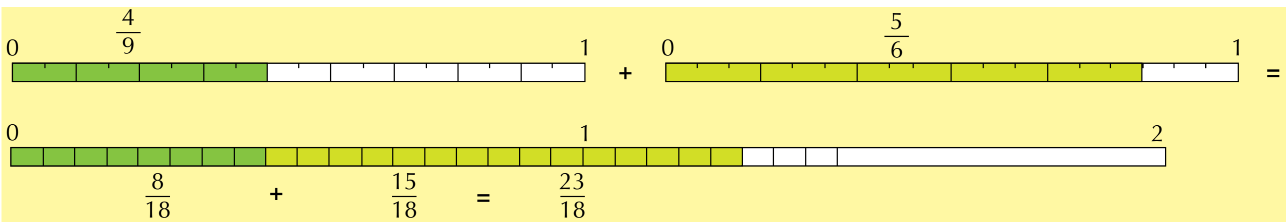
$$\frac{4}{9}\times\frac{\square}{\square}=\frac{\square}{18}\rightarrow\frac{4}{9}\times\frac{2}{2}=\frac{8}{18} \quad \text{entonces,} \quad \frac{4}{9}=\frac{8}{18}$$

$$\frac{5}{6}\times\frac{\square}{\square}=\frac{\square}{18}\rightarrow\frac{5}{6}\times\frac{3}{3}=\frac{15}{18} \quad \text{entonces,} \quad \frac{5}{6}=\frac{15}{18}$$

Finalmente efectuamos la suma con los números racionales equivalentes a $\frac{4}{9}$ y $\frac{5}{6}$ así:

$$\frac{4}{9}+\frac{5}{6}=\frac{4\times 2}{9\times 2}+\frac{5\times 3}{6\times 3}=\frac{8}{18}+\frac{15}{18}=\frac{23}{18}$$

Gráficamente



2. Realicemos $\frac{13}{10} \times \frac{5}{6}$

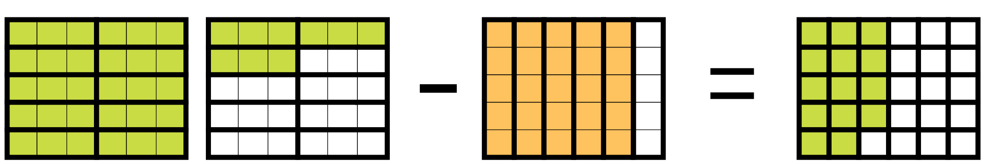
Hallamos el m. c. m. de los denominadores:

10	6	2
5	3	3
5	1	5

$2 \times 3 \times 5 = 30$

Se convierten en fracciones equivalentes con igual denominador y se efectúa la operación entre los numeradores, simplificando el resultado, en caso de que se pueda:

$$\frac{13}{10}\times\frac{5}{6}=\frac{39}{30}\times\frac{25}{30}=\frac{\overset{7}{\cancel{14}}}{\underset{15}{\cancel{30}}}=\frac{7}{15}$$



$$\frac{13}{10} - \frac{5}{6} = \frac{14}{30}$$

3. Una persona acude a la tienda para comprar azúcar, que recibe en tres paquetes con las siguientes cantidades: $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$, y $\frac{1}{4}$ de kilogramo.

   Sin embargo, al pagar, nota que no cuenta con el dinero suficiente y debe regresar $\frac{1}{4}$ kg de azúcar.

   ¿Qué cantidad de azúcar compró?

   Para poder determinar la cantidad de azúcar que compró, basta con realizar la siguiente operación combinada.

$$\frac{2}{4}+\frac{3}{4}+\frac{4}{4}\text{x}\frac{1}{4}=\frac{2+3+4+1}{4}=\frac{\cancelto{4}{8}}{\cancelto{2}{4}}=\frac{\cancelto{2}{4}}{\cancelto{1}{2}}=\frac{2}{1}=2$$

Como se puede apreciar, esta operación presenta tanto adición como sustracción de fracciones, situación que se manifiesta por el uso de los signos de operación (+) y menos (–).

Otro aspecto por considerar es el hecho de que sus denominadores son iguales, por lo cual el procedimiento utilizado en la adición y sustracción se aplica en la resolución de operaciones de esta forma.

Una vez hechas las consideraciones anteriores y realizadas las operaciones correspondientes, se tiene que la cantidad de azúcar que compró es 2 kg.

Recuerda:

1. Dos fracciones son iguales si el producto cruzado entre sus términos es igual.

$\frac{4}{5}=\frac{8}{10}$ ya que $4 \text{ x} 10 = 8 \text{ x} 5$

2. Al simplificar una fracción se eliminan los divisores comunes entre sus términos.

$\frac{9}{10}$ es la fracción simplificada de $\frac{45}{50}$ pues 5 es divisor común de 45 y 50 que son términos: $\frac{45}{50}=\frac{45 \text{ x } 5}{50 \text{ x } 5}=\frac{9}{10}$

3. Una fracción es negativa si al menos uno de sus términos es negativo.

$$-\left(\frac{8}{11}\right)=\frac{-8}{11}=\frac{8}{-11}$$

4. La suma de fracciones con denominadores iguales es igual a la suma de los numeradores sobre el mismo denominador.

$$\frac{7}{19} + \left(-\frac{3}{19}\right) + \frac{1}{19} = \frac{5}{19}$$

5. La suma de fracciones con denominadores diferentes es igual a la suma del producto cruzado sobre el producto de los denominadores.

$$\frac{6}{15} + \frac{3}{2} = \frac{(6 \times 2) + (15 \times 3)}{15 \times 2} = \frac{12 + 45}{30} = \frac{57}{30}$$

6. El producto de fracciones es igual al producto de los numeradores sobre el producto de los denominadores.

$$\frac{6}{5} \times \frac{3}{2} = \frac{6 \times 3}{5 \times 2} = \frac{18}{10}$$

7. El cociente de fracciones es igual a la multiplicación del recíproco del divisor.

$$\frac{3}{5} \div \frac{2}{7} = \frac{3}{5} \times \frac{7}{2}$$

8. En la suma y resta de fracciones es necesario convertir a un común denominador.

$$\frac{3}{5} + \frac{2}{7} = \frac{3 \times 7}{5 \times 7} + \frac{2 \times 5}{7 \times 5} = \frac{21}{35} + \frac{10}{35}$$

$$\frac{3}{5} - \frac{2}{7} = \frac{3 \times 7}{5 \times 7} - \frac{2 \times 5}{7 \times 5} = \frac{21}{35} - \frac{10}{35}$$

Propiedades de las operaciones entre números racionales

Suma y resta

Ya hemos estudiado en los cursos anteriores la suma y resta de fraccionarios positivos.

Ahora analicemos las propiedades para la suma de números racionales, esto es fraccionarios positivos y negativos.

Propiedades de las operaciones aditivas de los racionales

Dados $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ y $\frac{e}{f}$ definimos las siguientes propiedades

	Clausurativa	Asociativa	Modulativa	Invertiva	Conmutativa
Suma	$\frac{3}{2}+\frac{1}{4}=\frac{7}{4}$ En general: $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{g}{h}$ donde $\frac{g}{h}$ es racional	$\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{4}\right)+\frac{4}{5}=\frac{3}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{4}{5}\right)$ En general: $\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)+\frac{e}{f}=\frac{a}{b}+\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)$	$\frac{9}{17}+\frac{0}{1}=\frac{9}{17}$ En general: $\frac{a}{b}+\frac{0}{1}=\frac{a}{b}$	$\frac{2}{5}+\left(-\frac{2}{5}\right)=\frac{0}{5}$ En general: $\frac{a}{b}+\left(-\frac{a}{b}\right)=\frac{0}{b}$	$\frac{3}{2}+\frac{4}{5}=\frac{4}{5}+\frac{3}{2}$ En general: $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{c}{d}+\frac{a}{b}$

La resta es un caso particular de la suma, pues restar un número racional es sumar su opuesto.

$$\frac{3}{2}-\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{2}+\left(-\frac{1}{4}\right) \text{ en general } \frac{a}{b}-\left(\frac{c}{d}\right)=\frac{a}{b}+\left(-\frac{c}{d}\right)$$

Multiplicación y división de números racionales

Existen ocasiones en que no se fracciona en partes iguales un todo, sino que tenemos la necesidad de calcular o de tomar una o varias partes de una fracción o tomar una fracción de un número entero.

¿Recuerdas las leyes de los signos de la multiplicación y de la división de números enteros?

(+) (+) = + (-) (-) = + (+) (-) = - (-) (+) = -

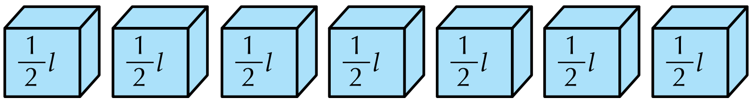
(+) ÷ (+) = + (-) ÷ (-) = + (+) ÷ (-) = - (-) ÷ (+) = -

Analicemos las situaciones siguientes:

1. Siete alumnos del grado segundo van a vender jugos de frutas con leche, en la escuela.

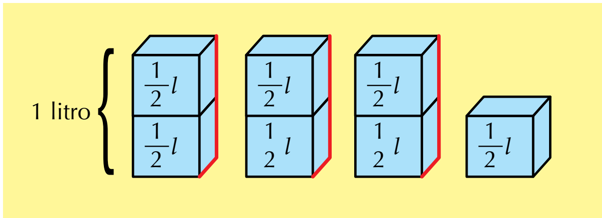
   Cada niño aporta. $\frac{1}{2}$ litro de leche. ¿Cuántos litros de leche se reunieron?

   Veamos:
   7 cajas de $\frac{1}{2}$ litro cada una, son equivalentes a $\frac{7}{2}$ litros,

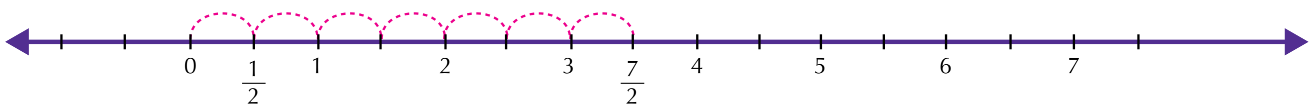


$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=$$

es decir, $3\frac{1}{2}$ litros.



Representémoslo en la recta numérica:

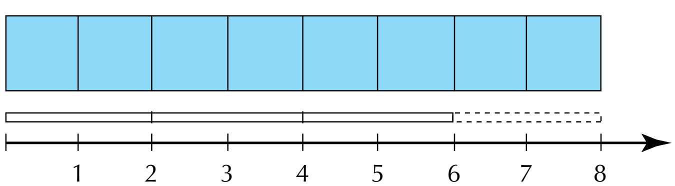


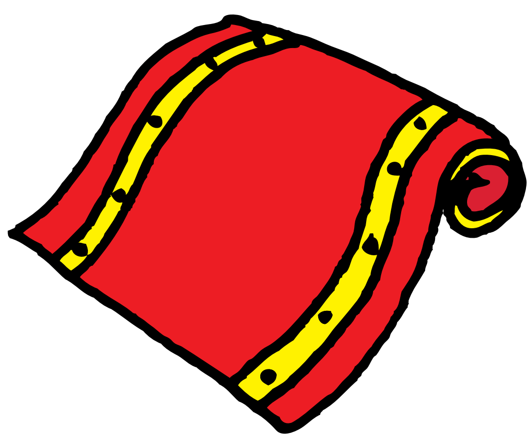
Vemos que 7 veces $\frac{1}{2}$ es igual a $\frac{7}{2}$ o $3\frac{1}{2}$.

Como tenemos la repetición del mismo sumando, entonces, en vez de sumar podemos multiplicar así:

7 veces $\frac{1}{2}$ equivale a $7 \times \frac{1}{2} = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$.

2. Para confeccionar un vestido, una modista, dispone de 8 metros de tela. Como solo necesita las tres cuartas partes de la tela, ¿cuántos metros utiliza?



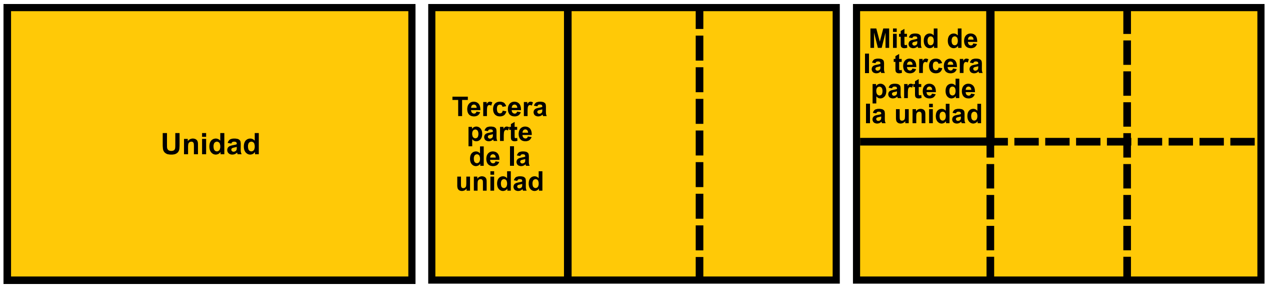


Tomamos $\frac{3}{4}$ de los 8 metros:

$\frac{3}{4}$ de 8 metros son 6 metros: $\frac{3}{4} \times 8 = \frac{3 \times 8}{4} = \frac{24}{4} = 6$.

3. Un campesino va a sembrar legumbres en la mitad de la tercera parte de su parcela.
¿Qué parte del total de la parcela tendrá legumbres?
¿Qué parte representa la mitad de la tercera parte de un entero?

Esta situación puede ser representada gráficamente, así:
¿Qué parte representa la mitad de la tercera parte de una unidad?
Veamos la representación gráfica



Se divide el entero en tres partes iguales (tercios) y se marca una de ellas.

Los tercios se dividen a la mitad y se marca $\frac{1}{2}$ del tercio marcado inicialmente.

Por lo tanto, tenemos: $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{3}$ es $\frac{1}{6}$.

La figura queda dividida en seis partes iguales, así que un medio de un tercio es un sexto.

Numéricamente lo escribimos así: $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.

Como se puede observar, la multiplicación de fracciones puede aplicarse en diferentes situaciones:

Cuando se repite un número entero de veces una fracción: $6 \times \frac{3}{5} = \frac{18}{5}$.

Cuando se toma una parte de un entero: $\frac{2}{3} \times 12 = \frac{24}{3}$.

Cuando se toma una parte de una fracción: $\frac{5}{6} \times \frac{7}{8} = \frac{35}{48}$.

Para representar la multiplicación de dos fracciones se puede hacer de varias formas:

Utilizando un punto: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$, utilizando el signo $\times$: $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$ y utilizando paréntesis: $\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)$.

Los términos de la multiplicación de racionales son:

$$\underbrace{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}}_{\text{Factores}} = \underbrace{\frac{1}{6}}_{\text{Producto}}$$

Observa que el numerador que resulta es el producto de los numeradores (1 x 1) y que el denominador que resulta es el producto de los denominadores (2 x 3).

En general, dados dos números racionales $\frac{b}{e}$ y $\frac{c}{d}$ ***en donde*** e ***y*** d ***son diferentes de cero, se cumple que:*** $\frac{b}{e} \times \frac{c}{d} = \frac{b \times c}{e \times d} = \frac{b\ \ c}{e\ \ d}$.

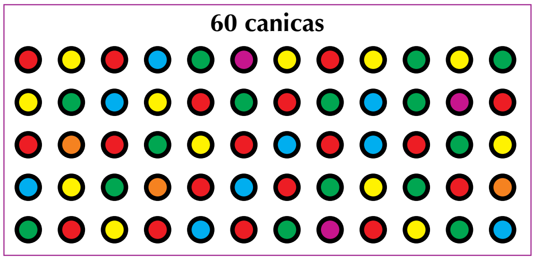
En la multiplicación de fracciones no es necesario convertir a un común denominador, pues siempre se multiplican los numeradores entre sí y los denominadores entre sí, sin interesar que los denominadores de los racionales dados sean de denominadores iguales o diferentes.

Analicemos estas otras situaciones:

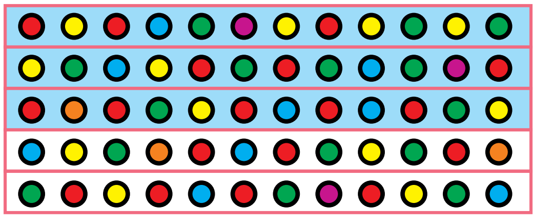
4. ¿Cuánta cantidad de 60 canicas (bolitas) son los $\frac{2}{3}$ de los $\frac{3}{5}$?

Solución gráfica

Primero representamos 60 canicas.

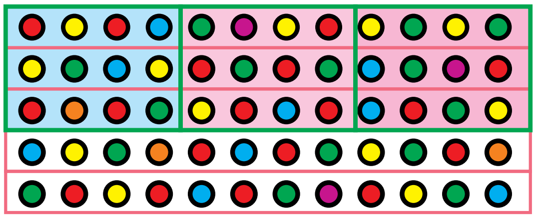


Después representamos los $\frac{3}{5}$ de 60 canicas, esto es 36 canicas.



La parte sombreada de azul representa $\frac{3}{5}$ de 60 canicas

Finalmente, representamos los $\frac{2}{3}$ de los $\frac{3}{5}$ de las 60 canicas, esto es, los $\frac{2}{3}$ de 36 canicas, o sea, 24 canicas.



La parte sombreada de rosado representa $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{5}$ de 60 canicas

Solución numérica

Calculamos los $\frac{2}{3}$ de los $\frac{3}{5}$ de las 60 así:

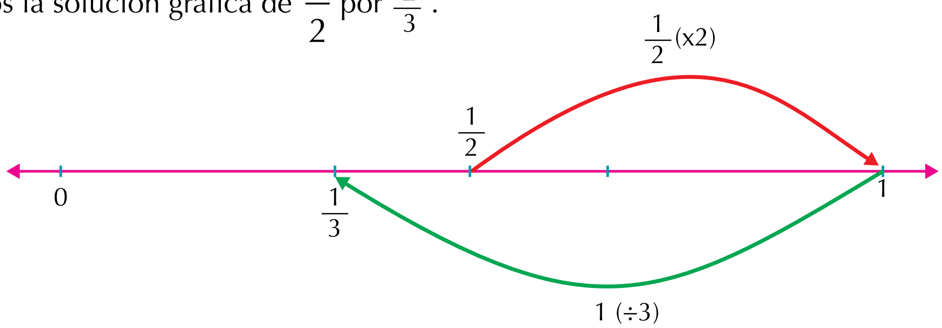
$$\frac{2}{3} \times \frac{3}{5} \times \frac{60}{1} = \frac{2 \times 3 \times 60}{3 \times 5 \times 1} = \frac{\overset{72}{\cancel{360}}}{\underset{3}{\cancel{15}}} = \frac{\overset{24}{\cancel{72}}}{\underset{1}{\cancel{3}}} = 24$$

Luego los $\frac{2}{3}$ de los $\frac{3}{5}$ de las 60 canicas son 24 canicas.

Para multiplicar números racionales se multiplican los numeradores entre sí y los denominadores entre sí, teniendo en cuenta las leyes de los signos de la multiplicación, estudiadas anteriormente:

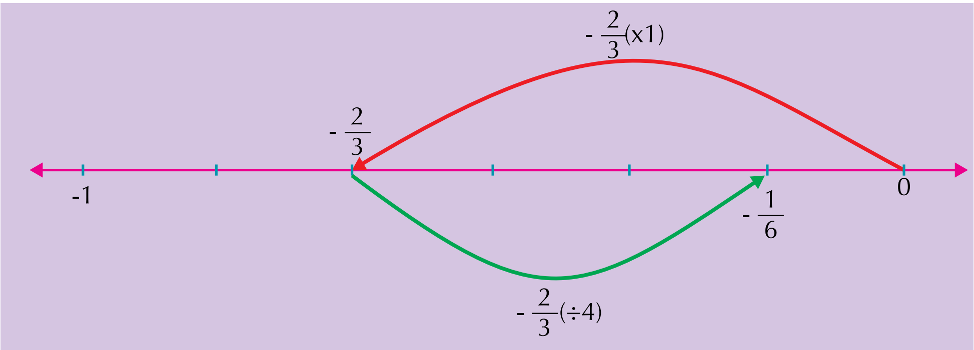
(+) x (+)=(+)
(-) x (-) = (+)
(+) x (-) = (-)
(-) x (+) = (-)

5. Observemos la solución gráfica de $\frac{1}{2}$ por $\frac{2}{3}$.

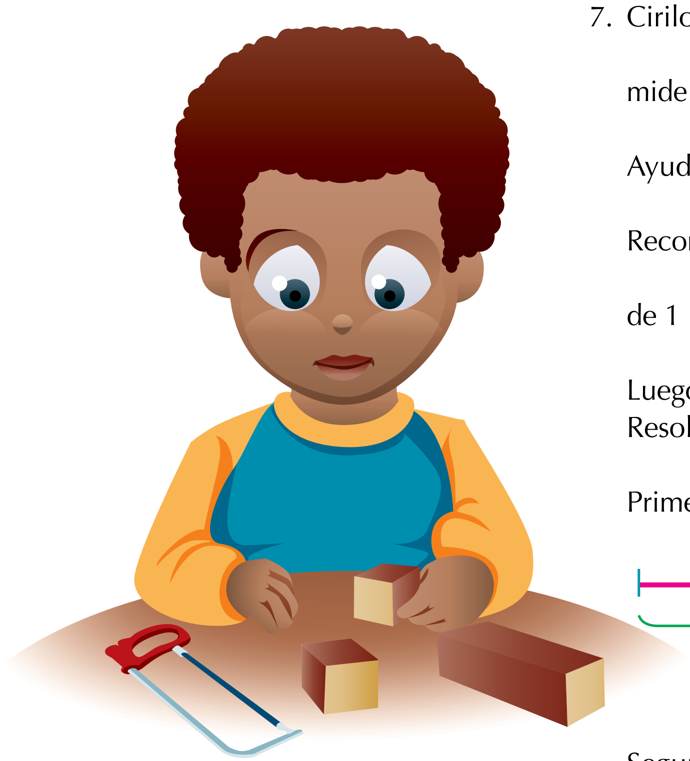


Luego $\frac{1}{2} x \frac{2}{3} = \left[\left(\frac{1}{2} x 2\right) \div 3\right] = \frac{2}{2} \div 3 = \frac{2}{2} \div \frac{3}{1} = \frac{2}{2} x \frac{1}{3} = \frac{\overset{1}{\cancel{2}}}{\underset{3}{\cancel{6}}} = \frac{1}{3}$.

6. Al multiplicar $-\frac{2}{3}$ por $\frac{1}{4}$ gráficamente observamos:



Luego: $-\frac{2}{3} x \frac{1}{4} = -\frac{1}{6}$.



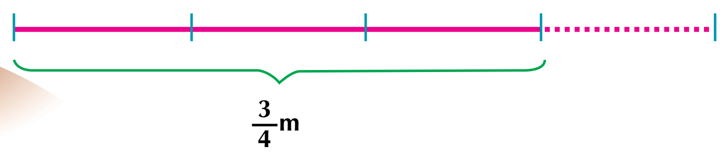
7. Cirilo desea sacar 12 trozos de un listón de madera que mide de longitud $\frac{3}{4}$ m. ¿Cuánto debe medir cada pedazo?

Ayudémosle Cirilo a solucionar el caso.

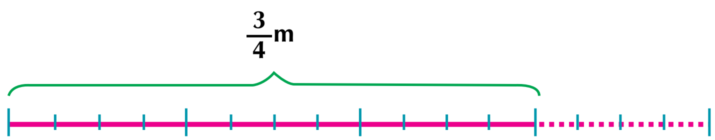
Recordemos que $\frac{3}{4}$ m. significa que tomamos una longitud de 1 m y lo dividimos en 4 pedazos para tomar 3.

Luego, de esos 3 pedazos Cirilo quiere sacar 12 trozos. Resolviendo el problema en varios pasos tenemos:

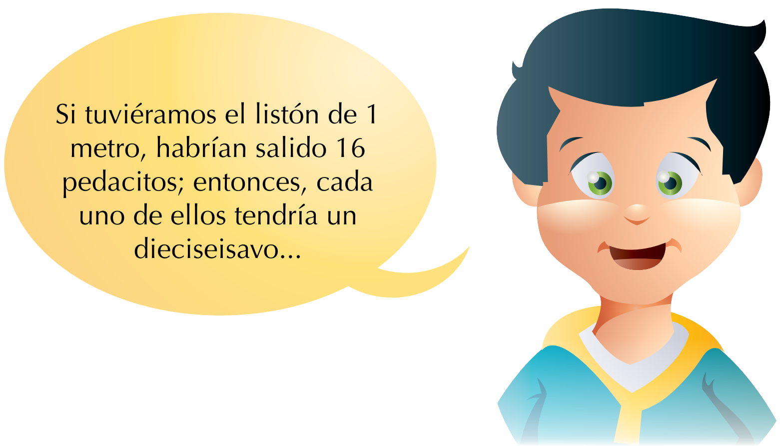
Primero representamos el listón, marcando $\frac{3}{4}$.



Segundo obtenemos 12 pedazos de igual longitud, del pedazo que representa los $\frac{3}{4}$.



Tercero nos preguntamos: ¿Qué parte del listón es un pedazo?



Según el gráfico, cada pedazo tiene $\frac{1}{16}$ de metro.

Otra manera de resolver el problema es averiguando cuánto es $\frac{1}{12}$ de $\frac{3}{4}$ m de listón. Es decir, tenemos $\frac{3}{4}$ m y vamos a dividirlo en 21 trozos o pedazos.

Esto es: $\frac{3}{4} \div 12 = \frac{3}{4} \div \frac{12}{1}$.

Como dividir entre un número racional es igual que multiplicar por su inverso, entonces, la división se convierte en un caso particular de la multiplicación.

Así: $\frac{3}{4} \div 12 = \frac{3}{4} \div \frac{12}{1} = \frac{3}{4} \times \frac{1}{12} = \frac{\cancel{3}}{\cancel{4}8} = \frac{1}{16}$

Para dividir un número racional entre otro, se multiplica el primero por el inverso del segundo.

En la multiplicación y en la división de números racionales no es necesario convertir a un común denominador, pues no interesa que los denominadores de los racionales dados sean iguales o diferentes.

Propiedades de la multiplicación de números racionales

Leyes de la multiplicación de números racionales		
1. Clausurativa	$\frac{7}{5} \times \frac{-4}{3} = -\frac{28}{15}$	El producto de dos números racionales es otro número racional.
2. Asociativa	$\left(\frac{1}{3} \times \frac{2}{5}\right) \times \frac{2}{4} = \frac{2}{15} \times \frac{2}{4} = \frac{4}{60}$ $\frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{5} \times \frac{2}{4}\right) = \frac{1}{3} \times \frac{4}{20} = \frac{4}{60}$	Agrupando los factores.
3. Modulativa	$\frac{6}{7} \times 1 = \frac{6}{7}$	Todo número multiplicado por 1 da como producto el mismo número.
4. Anulativa	$\frac{3}{5} \times 0 = 0$	Cualquier número multiplicado por 0 da 0.
5. Invertiva	$\frac{-2}{9} \times \frac{9}{-2} \times \frac{-18}{-18} = \frac{18}{18} = 1$	Todo número racional multiplicado por su inverso da 1.
6. Conmutativa	$\frac{3}{4} \times \frac{5}{6} = \frac{15}{24}$ $\frac{5}{6} \times \frac{3}{4} = \frac{15}{24}$	El orden de los factores no altera el producto.

En la multiplicación		En la división	
$\frac{4}{9} \times -\frac{5}{3}$ $= -\frac{4 \times 5}{9 \times 3}$ $= -\frac{20}{27}$	$-\frac{5}{3} \times \frac{4}{9}$ $= -\frac{5 \times 4}{3 \times 9}$ $= -\frac{20}{27}$	$\frac{4}{9} \div -\frac{5}{3} = \frac{4}{9} \times -\frac{3}{5}$ $= -\frac{4 \times 3}{9 \times 5}$ $= -\frac{12}{45}$	$-\frac{5}{3} \div \frac{4}{9} = -\frac{5}{3} \times \frac{9}{4}$ $= -\frac{5 \times 9}{3 \times 4}$ $= -\frac{45}{12}$
Como intercambiar los términos de la multiplicación de números racionales **no** altera el resultado, entonces, **la multiplicación de números racionales sí es conmutativa.**		Como intercambiar los términos de la división de números racionales **sí** altera el resultado, entonces, **la división de números racionales no es conmutativa.**	

Propiedad distributiva del producto respecto a la suma en el sistema de números racionales

Vamos a realizar la operación $\frac{12}{7} \times \left(\frac{3}{4} + \frac{5}{2}\right)$.

Podemos resolverla de dos maneras:
Una manera es resolviendo la suma y luego el producto.

$$\frac{12}{7} \times \left(\frac{3}{4} + \frac{5}{2}\right) = \frac{12}{7} \times \left(\frac{3}{4} + \frac{5 \times 2}{2 \times 2}\right) = \frac{12}{7} \times \left(\frac{3}{4} + \frac{10}{4}\right) = \frac{12}{7} \times \left(\frac{13}{4}\right) = \frac{12 \times 13}{7 \times 4} = \frac{156}{28} = \frac{39}{7} = 5\frac{4}{7}$$

Otra manera es distribuyendo el producto y posteriormente sumando, así:

$$\frac{12}{7} \times \left(\frac{3}{4} + \frac{5}{2}\right) = \left(\frac{12}{7} \times \frac{3}{4}\right) + \left(\frac{12}{7} \times \frac{5}{2}\right) = \left(\frac{36}{28}\right) + \left(\frac{60}{14}\right) = \frac{36}{28} + \frac{60 \times 2}{14 \times 2} = \frac{36}{28} + \frac{120}{28} = \frac{156}{28} = \frac{39}{28} = 5\frac{4}{7}$$

Este último procedimiento se conoce como ley o propiedad distributiva del producto con respecto a la suma.

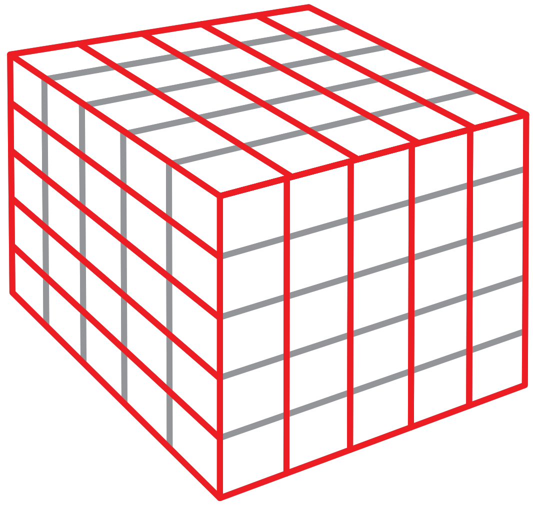
En general, el producto de un número racional por la suma de dos números racionales es igual a La suma de los productos del número racional por cada uno de los sumandos

Potenciación de números racionales

Vamos a estudiar algunas situaciones en las cuales se necesita utilizar la potenciación.

Recordemos la potenciación como la hemos estudiado en los cursos anteriores.

1. En una caja hay 5 estuches que tienen, cada estuche contiene 5 cajitas y cada cajita contiene 5 jabones. ¿Cuántos jabones en total hay en la caja?



Solución

5 estuches x 5 cajitas = 5 x 5 = 5^2 cajitas.

Y como cada cajita tiene 5 jabones, entonces hay 5^2 cajitas x 5 jabones = 5 x 5 x 5 = 5^3 jabones.

5^3 = 5 x 5 x 5 = 125 jabones hay en total en la caja.

Recordemos que los términos de la potenciación son:

$$\overset{\text{exponente}}{5^{3}} = 125 \rightarrow \text{potencia}$$

base

Observemos los cuadrados de algunos números.

1^2 = 1x1 = 1	11^2 = 11x11 = 121	30^2 = 30x30 = 900
2^2 = 2x2 = 4	12^2 = 12x12 = 144	40^2 = 40x40 = 1,600
3^2 = 3x3 = 9	13^2 = 13x13 = 169	50^2 = 50x50 = 2,500
4^2 = 4x4 = 16	14^2 = 14x14 = 196	60^2 = 60x60 = 3,600
5^2 = 5x5 = 25	15^2 = 15x15 = 225	70^2 = 70x70 = 4,900
6^2 = 6x6 = 36	16^2 = 16x16 = 256	80^2 = 80x80 = 6,400
7^2= 7x7 = 49	17^2 = 17x17 = 289	90^2 = 90x80 = 8,100
8^2 = 8x8 = 64	18^2 = 18x18 = 324	100^2 = 10x10 = 10,000
9^2 = 9x9 = 81	19^2 = 19x19 = 361	
10^2=10x10 =100		

Con el mismo procedimiento, tú puedes calcular el cuadrado del número que quieras.

2. Dado el número racional $\frac{2}{5}$ elevarlo a la:

a. 2
b. 3
c. 4

Solución

a. $\left(\frac{2}{5}\right)^2 = \left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{2\times 2}{5\times 5} = \frac{4}{25}$

b. $\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{2\times 2\times 2}{5\times 5\times 5} = \frac{8}{125}$

c. $\left(\frac{2}{5}\right)^4 = \left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{2\times 2\times 2\times 2}{5\times 5\times 5\times 5} = \frac{16}{625}$

Recordamos que la potenciación se convierte en la multiplicación del mismo factor, tantas veces como diga el exponente.

3. Dado el número racional $-\frac{1}{3}$ elevarlo a la

a. 2
b. 3
c. 4
d. 5

Solución

a. $\left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{(-1)\ (-1)}{3 \times 3} = \frac{1}{9}$

b. $\left(-\frac{1}{3}\right)^3 = \left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{(-1)\ (-1)\ (-1)}{3 \times 3 \times 3} = \frac{-1}{27} = -\frac{1}{27}$

c. $\left(-\frac{1}{3}\right)^4 = \left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{(-1)\ (-1)\ (-1)\ (-1)}{3 \times 3 \times 3 \times 3} = \frac{1}{81}$

d. $\left(-\frac{1}{3}\right)^5 = \left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{(-1)\ (-1)\ (-1)\ (-1)\ (-1)}{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3} = \frac{-1}{243} = -\frac{1}{243}$

Observamos que cuando un número racional negativo se eleva a una potencia par da positivo y cuando el número racional negativo se eleva a una potencia impar da negativo.

Potencia de una potencia

¿Cuál será el resultado de $\left(-\frac{2}{5}\right)^2$ y luego a la 3?

Solución
Podemos resolverlo de varias maneras.

Una manera puede ser:

$$\left[\left(-\frac{2}{5}\right)^2\right]^3 = \left[\left(-\frac{2}{5}\right)\left(-\frac{2}{5}\right)\right]^3 = \left(\frac{4}{25}\right)^3 = \left(\frac{4}{25}\right)\left(\frac{4}{25}\right)\left(\frac{4}{25}\right) = \frac{64}{15{,}625}$$

Otra manera es:

$$\left[\left(-\frac{2}{5}\right)^2\right]^3 = \left(-\frac{2}{5}\right)^2 \times \left(-\frac{2}{5}\right)^2 \times \left(-\frac{2}{5}\right)^2$$

$$= \left(-\frac{2}{5}\right)\left(-\frac{2}{5}\right) \times \left(-\frac{2}{5}\right)\left(-\frac{2}{5}\right) \times \left(-\frac{2}{5}\right)\left(-\frac{2}{5}\right)$$

$$= \left(-\frac{2}{5}\right)\left(-\frac{2}{5}\right)\left(-\frac{2}{5}\right)\left(-\frac{2}{5}\right)\left(-\frac{2}{5}\right)\left(-\frac{2}{5}\right)$$

$$= \frac{64}{15{,}625}$$

Observamos que $\left[\left(-\frac{2}{5}\right)^2\right]^3$ es lo mismo que

$\left(-\frac{2}{5}\right)\left(-\frac{2}{5}\right)\left(-\frac{2}{5}\right)\left(-\frac{2}{5}\right)\left(-\frac{2}{5}\right)\left(-\frac{2}{5}\right)$ que corresponde a $\left(-\frac{2}{5}\right)^6$.

Por lo que concluimos que $\left[\left(-\frac{2}{5}\right)^2\right]^3 = \left(-\frac{2}{5}\right)^{2\times 3} = \left(-\frac{2}{5}\right)^6$

En general, la potencia de una potencia es igual a la base elevada al producto de los exponentes.

$\left[\left(\frac{a}{b}\right)^n\right]^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{nm}$ ***siempre que b sea diferente de cero.***

Radicación de números racionales

Hemos estudiado cómo la suma y la multiplicación de números enteros son operaciones conmutativas, por lo tanto, se utiliza la misma operación inversa para encontrar uno cualquiera de sus términos.

Así, por ejemplo. 8+5 = 13. Si queremos averiguar el primer sumando, decimos x + 5 = 13 y para averiguarlo, utilizamos la resta: x = 13 – 5 = 8.

Si el término desconocido es el segundo sumando, esto es 8 + y = 13, también utilizamos la resta: y =13 – 8 = 5. En ambos casos sirve la resta porque la suma es conmutativa: 8 + 5 = 5 + 8.

Igual ocurre con la multiplicación, por ejemplo:5 (8) = 40, entonces, x (8) = 40 de donde x = 40 ÷ 8 = 5 y también 5 (y) = 40 de donde y = 40 ÷ 5 = 8. La operación utilizada, en ambos, es misma porque 5 (8) = 8 (5)

En la potenciación no pasa lo mismo pues 2^3 no es lo mismo que 3^2 porque $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$ y $3^2 = 3 \times 3 = 9$.

Como la potenciación no es conmutativa, entonces, la potenciación tiene dos inversas: una para averiguar la base y otra para averiguar el exponente. Si se necesita conocer la base se utiliza la radicación y si lo que necesita es el exponente se utiliza logaritmación.

Así por ejemplo: 10^6 = 1,000,000

Si desconocemos la base tendremos $x^2 = 100$, en otras palabras, ¿cuál es el número que elevado a la 2 da 100?, lo averiguamos buscando la raíz cuadrada de 100: $\sqrt[2]{100} = 10$ porque $10^2 = 100$.

Pero si desconocemos el exponente, tendremos $10^y = 100$, en otras palabras, ¿cuál es el número al que hay que elevar a 10 para que de 100?, lo averiguamos buscando el logaritmo en base 10 de 100:

$Log_{10} = 100 = 2$ porque $10^2 = 100$

Aplicamos estos conceptos a los números racionales y tendremos lo siguiente:

1. Calcular la raíz cuadrada de $\frac{16}{25}$.

Se escribe $\sqrt{\frac{16}{25}}$

Solución

$$\sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}} = \frac{\pm 4}{\pm 5}$$

Decimos ± 4 el número que multiplicado por sí mismo da 16 puede ser +4 ya que $(+4)(+4) = 16$, pero también es – 4 porque $(-4)(-4) = 16$.

Igual ocurre con $\sqrt{25}$ que puede ser + 5 porque $(+5)(+5) = 25$ o puede ser – 5 porque $(-5)(-5) = 25$.

La raíz de un número racional es igual a la raíz del numerador sobre la raíz del denominador.

Analicemos los ejercicios siguientes:

1. ¿ $\sqrt{81+36}$ será igual que $\sqrt{81}+\sqrt{36}$?

Veamos: $\sqrt{81+36} = \sqrt{117} = 10.817$, mientras que $\sqrt{81} + \sqrt{36} = 9 + 6 = 15$.

Observemos $\sqrt{81+36}$ no es igual que $\sqrt{81}+\sqrt{36}$.

Simbólicamente escribimos: $\sqrt{81+36} \neq \sqrt{81} + \sqrt{36}$.

2. ¿ $\sqrt{\frac{81}{9}+\frac{36}{4}}$ será igual que $\sqrt{\frac{81}{9}}+\sqrt{\frac{36}{4}}$?

Resolviendo cada parte tenemos:

$$\sqrt{\frac{81}{9}+\frac{36}{4}}=\sqrt{\frac{81\,x4}{9\,x4}+\frac{36\,x9}{4x9}}=\sqrt{\frac{324}{36}+\frac{324}{36}}=\sqrt{\frac{648}{36}}=\sqrt{\frac{25,45}{6}}=4.24$$

Mientras que

$$\sqrt{\frac{81}{9}}+\sqrt{\frac{36}{4}}=\frac{9}{3}+\frac{6}{2}=\frac{9x2}{3\,x2}+\frac{6x3}{3\,x3}=\frac{18}{6}+\frac{18}{9}=3+2=5$$

Luego: $\sqrt{\frac{81}{9}+\frac{36}{4}}\neq\sqrt{\frac{81}{9}}+\sqrt{\frac{36}{4}}$

En general: La raíz cuadrada de una suma de dos números racionales no es igual que la suma de las raíces de los racionales dados.

3. ¿Será que $\sqrt{\left(\frac{25}{9}\right)\left(\frac{16}{49}\right)}$ da igual que $\sqrt{\frac{25}{9}}\bullet\sqrt{\frac{16}{49}}$?

Veamos:

$$\sqrt{\left(\frac{25}{9}\right)\left(\frac{16}{49}\right)}=\sqrt{\frac{400}{441}}=\frac{20}{21}$$

$$\sqrt{\frac{25}{9}}\cdot\sqrt{\frac{16}{49}}=\frac{5}{3}\cdot\frac{4}{7}=\frac{20}{21}$$

En este caso vemos que $\sqrt{\left(\frac{25}{9}\right)\left(\frac{16}{49}\right)}=\sqrt{\frac{25}{9}}\bullet\sqrt{\frac{16}{49}}$

Concluimos que: La raíz cuadrada del producto de dos números es igual al producto de las raíces.

Aplicación

Copia en tu cuaderno, los ejercicios siguientes. Forma una pareja, resuélvanlos y después compara con otras parejas.

1. Juanita tenía $\frac{15}{20}$ kg de arroz y compró $\frac{1}{4}$ kg más para preparar arroz con leche. Del total de arroz que tenía, utilizó $\frac{11}{20}$ kg. ¿Qué cantidad de arroz no utilizó?

2. Gonzalo emplea $\frac{5}{10}$ de hora viajando en el bus y $\frac{1}{4}$ de hora más que en bus, caminando para ir de la escuela a su casa.
   Sabiendo que la hora tiene 60 minutos,

   a. ¿Cuántos minutos emplea Gonzalo viajando en el bus?
   b. ¿Cuántos minutos emplea Gonzalo caminando?

3. John ha estudiado $\frac{3}{4}$ de hora, Enrique estudia $\frac{2}{3}$ de hora y Juan estudia 2 horas. ¿Cuántas horas han estudiado entre los tres?

4. Doña Teresa vendió los $\frac{2}{3}$ de una docena de zapatos el lunes, los $\frac{3}{12}$ de una docena el martes y los $\frac{4}{6}$ el miércoles. Si tenía dos docenas de pares de zapatos, ¿cuántos pares le quedan?

5. ¿Qué dura más, $\frac{3}{5}$ de minuto o $\frac{7}{12}$ de minuto?

6. Rodolfo compró 4 kg de mango, $\frac{3}{4}$ kg de naranja, $\frac{1}{2}$ kg de manzana y 3 kg de uva. Depositó todas sus frutas en una caja para llevarlas a casa. ¿Cuál es el peso de las frutas compradas?

7. Encuentra los $\frac{3}{4}$ de los $\frac{3}{2}$ de los $\frac{5}{10}$ de \$900,000.

Resuelve las operaciones siguientes:

8.

a. $-\left(\frac{3}{4}\right)^2$ b. $\left(-\frac{3}{4}\right)^2$

c. Explica por qué dan diferente los resultados a) y b).

9.

a. $\left(\frac{1}{2}\right)^3 \div \left(\frac{2}{3}\right)^2 =$ b. $\left(\frac{15}{20}\right)^2 \div \left(\frac{5}{4}\right)^2 =$ c. $\left(\frac{7}{2}\right)^2 \div \left(\frac{4}{2}\right)^5 =$

10.

a. $\left[\left(\frac{3}{7}\right)^3\right]^2 =$ b. $\left[\left(\frac{-3}{5}\right)^3\right]^2 =$ c. $\left[\left(\frac{-3}{5}\right)^3\right]^2 =$

Entendemos por…

Recíproco llamado también **Inverso multiplicativo** al número racional tal que multiplicado por otro racional dé como resultado 1. Expresado de otra manera, decimos que dos números racionales son recíprocos cuando su producto es 1.

Por ejemplo $\frac{3}{2}$ y $\frac{3}{2}$ son recíprocos porque $\frac{3\times 2}{2\times 3}=\frac{6}{6}=1$

Diversión matemática

El laberinto de las fracciones

Un maestro iba caminando por el pasillo de su escuela pensando cómo explicarle a sus alumnos cuándo una fracción está en su expresión más simple.

Si tanto el numerador como el denominador se pueden dividir entre un mismo número, significa que la fracción no está en su forma más simple, decía.

Por ejemplo, en la fracción $\frac{12}{36}$, tanto el numerador 12

como el denominador 36 se pueden dividir entre 2 y nos da

respectivamente 6 y 18 por lo que $\frac{12}{36}$ es igual a $\frac{6}{18}$ y 6

y 18 se pueden dividir entre 2 y nos da 3 y 9, pero 3 y 9 se pueden dividir entre 3 obteniendo 1 y 3.

Finalmente 1 y 3 no se pueden dividir, decía el maestro.

Así que la fracción $\frac{12}{36}$ es equivalente a la fracción $\frac{1}{3}$ y

ésta es la expresión más simple.

Esto es: $\frac{12}{36}=\frac{6}{18}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

Todas esas fracciones son equivalentes y $\frac{1}{3}$ es la expresión más simple.

Ayuda al maestro a llegar al salón a través del laberinto. Sólo puedes pasar por fracciones que estén en su expresión más simple y con las letras que aparecen junto a ellas, descifra el mensaje que el maestro va a darle a sus alumnos.

http: //redescolar.ilce.edu.mx/educontinua/mate/lugares/mate1i/mate1i.htm

Día a día

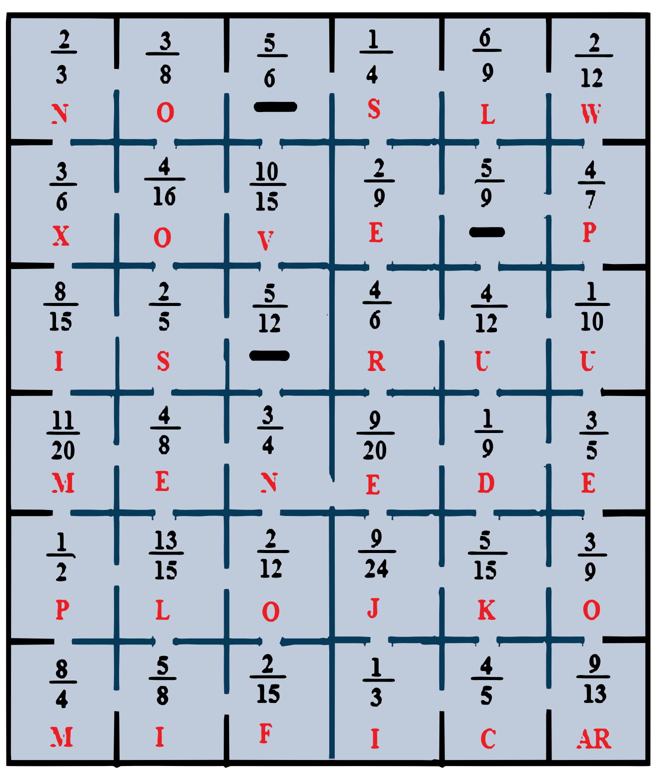
La economía colombiana

Una de las economías emergentes más destacadas internacionalmente, es la economía de Colombia, habiendo logrado aumentar la inversión extranjera al país hasta $2\frac{1}{2}$ veces la inversión desde el año 2000.

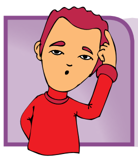
En América Latina, la mayor economía es la de Brasil, seguida por México, Argentina, Venezuela y de 5ª está Colombia.

Una de las bases de la economía colombiana es el café que ocupa un renglón importante en la exportación a nivel mundial. Le sigue el petróleo ya que Colombia es el 6° productor del continente.

Colombia es reconocida mundialmente por sus esmeraldas y sus flores.



Tema 3. La fracción decimal, conversiones y operaciones entre números decimales



Indagación

¿Recuerdas que en los cursos anteriores aprendimos que toda fracción es una división?

Así $\frac{-1}{4}$ puede expresarse como el resultado de efectuar la división – 1 entre 4.

$$\begin{array}{r|l} -10 & 4 \\ \cline{2-2} 20 & -0.25 \\ 0 & \end{array}$$

Sabemos que $(-) \div (+) = -$

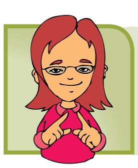
Por lo tanto $\frac{-1}{4} = -0.25$.

Ahora, escribe su decimal equivalente:

a. $\frac{-6}{5} = \boxed{}$

b. $\frac{-2}{-9} = \boxed{}$

c. $\frac{3}{5} = \boxed{}$



Conceptualización

Analicemos las situaciones siguientes:

1. En un colegio, de un curso de 40 estudiantes, 5 son zurdos.

   a. ¿Qué fracción del curso es zurdo?
   b. ¿Cuál decimal representa esa fracción?

   Solución
   Total alumnos del curso = 40
   Zurdos = 5

a. Fracción de zurdos = $\frac{5}{40}$, es decir, 5 de cada 40.

Simplificando: $\frac{\cancel{5}^{1}}{\cancel{40}_{8}} = \frac{1}{8}$

b. El racional $\frac{1}{8}$ corresponde a la división

$$\begin{array}{r|l} 1\,0 & 8 \\ \hline 20 & 0.133\ldots \\ 20 & \\ 2 & \end{array}$$

Es decir, $\frac{1}{8} = 0.133\ldots = 0.1\overline{3}$

2. Milena adquirió $\frac{3}{4}$ m de cinta roja, 1.35 m de cinta azul y $\frac{2}{5}$ m de cinta amarilla.
¿Cuánta cantidad de cinta adquirió en total?

Solución
Indicamos la operación: $\frac{3}{4}+1.35+\frac{2}{5}=$

Es necesario considerar que las fracciones comunes con diferente denominador no se pueden sumar directamente, ya que para realizar la operación primero se obtienen fracciones equivalentes con el mismo denominador.

Tampoco se podrá sumar directamente si en la misma operación se tienen fracciones comunes y decimales como sumandos.

En este caso, se requiere una sola forma de representación numérica para poder sumar.

Podemos resolver el caso de varias maneras.

Una manera es que todos los sumandos tengan la forma de fracción, entonces, expresamos 1.35 como fracción, $1.35 = \frac{135}{100} = \frac{27}{20}$ y la operación queda: $\frac{3}{4}+\frac{27}{20}+\frac{2}{5}$.

Observemos que 20 contiene exactamente a 4 y 5, por lo que puede ser el común denominador. Así:

$$\frac{3}{4}+\frac{27}{20}+\frac{2}{5}=\frac{3\times 5}{4\times 5}+\frac{27}{20}+\frac{2\times 4}{5\times 4}=\frac{15}{20}+\frac{27}{20}+\frac{8}{20}=\frac{50}{20} \quad \text{y} \quad \frac{\cancel{50}^{5}}{\cancel{20}_{2}}=\frac{5}{2}=2\frac{1}{2}\text{ m}$$

Es decir, Milena adquirió $2\frac{1}{2}$ m de cinta.

3. Las medidas del pantalón de Teresa son: 1.07 m de largo, 1.54 m de cadera y 0.83 m de cintura. Teresa quiere expresar esas medidas en números racionales. Ayudémosle.

Solución

Para 1.07 m

$$1.07 = \frac{1.07}{1} = \frac{1.07\times100}{1\times100} = \frac{107}{100}.$$

Para 1,54 m

$$1.54 = \frac{1.54}{1} = \frac{1.54\times100}{1\times100} = \frac{\overset{77}{\cancel{154}}}{\underset{50}{\cancel{100}}} = \frac{77}{50}$$

Para 0.83 m

$$0.82 = \frac{0.82}{1} = \frac{0.82\times100}{1\times100} = \frac{\overset{41}{\cancel{82}}}{\underset{50}{\cancel{100}}} = \frac{41}{50}$$

Operaciones entre Números decimales

Adición

Otra manera de solucionar el problema de las cintas de Milena es expresando todos los sumandos en forma decimal:

En los cursos anteriores hemos estudiado que toda fracción es una división, así que:

$$\frac{3}{4} \text{ es } \begin{array}{r|l} 3 & 4 \\ \hline 30 & 0.75 \\ 20 & \end{array} \qquad \text{y} \qquad \frac{2}{5} \text{ es } \begin{array}{r|l} 2 & 5 \\ \hline 20 & 0.4 \\ 0 & \end{array}$$

entonces, la operación $\frac{3}{4}+1.35+\frac{2}{5} = 0.75 + 1.35 + 0.40$ se realiza ubicando los números de tal manera que cada punto decimal, quede uno debajo del otro.

Así:

$$\begin{array}{r} 0.75 \\ +\ 1.35 \\ 0.40 \\ \hline 2.50 \end{array}$$

Luego $\frac{3}{4}+1.35+\frac{2}{5} = 0.75+1.35+0.40 = 2.50$

Es decir, Milena compró 2.50 m de cinta.

Además, sabemos que: $2.50 = \frac{250}{100} = \frac{25}{10} = 2\,\frac{5}{10} = 2\,\frac{1}{2}$

Por lo tanto, concluimos que las dos formas de proceder dan la misma solución, ya que:

$$2\frac{1}{2}\text{ m} = 2.50\text{ m.}$$

Un número racional puede expresarse como un número decimal y viceversa.

Los números decimales pueden ser finitos como $-\frac{1}{4}$ o periódicos como $\frac{5}{99}$.

$\frac{-1}{4} = -0.25$ es un número decimal finito $\frac{5}{99} = -0.050505$, es un número decimal periódico.

Las cifras que se repiten se llaman período, así que el período del número decimal 0.050505…es 05.

Otra forma de escritura del número decimal 0.050505…es $0.\overline{05}$.

Ejemplo:

En un laboratorio se realiza un experimento para el cual se somete una sustancia a una temperatura de –7.2 °C. Enseguida, se la coloca al fuego donde asciende $4\frac{1}{2}$ ° C en pocos segundos.

Se desea conocer la temperatura de dicha sustancia en ese momento.

Solución

Podemos resolverlo de varias maneras.

Una manera es:

Transformamos el decimal –7.2 °C en forma de número racional:

$$-7.2 = \frac{-7.2}{1} = \frac{-7.2 \times 10}{1 \times 10} = \frac{-72}{10} = -\frac{36}{5}$$

Luego transformamos el mixto $4\frac{1}{2}$ en número racional: $4\frac{1}{2} = \frac{9}{2}$ (recordemos que como cada unidad tiene 2 medios, entonces 2 unidades tienen 4 medios, 3 unidades tienen 6 medios y 4 unidades tienen 8 medios,que con 1 medio más se reúnen 9 medios).

Por lo tanto, la suma que debemos resolver es

$-\frac{36}{5} + \frac{9}{2}$ ya que $-7.2 + 4\frac{1}{2} = -\frac{36}{5} + \frac{9}{2}$

$$-\frac{36}{5} + \frac{9}{2} = -\frac{36 \times 2}{5 \times 2} + \frac{9 \times 5}{2 \times 5} = -\frac{72}{10} + \frac{45}{10} = -\frac{27}{10} = -2\frac{7}{10}\text{°C}$$

Otra forma es:

Dejando el decimal –7.2 °C y transformar $4\frac{1}{2}$ en número decimal.

Sabemos que $4\frac{1}{2} = \frac{9}{2}$ y $9 \div 2 = 4.5$, entonces,

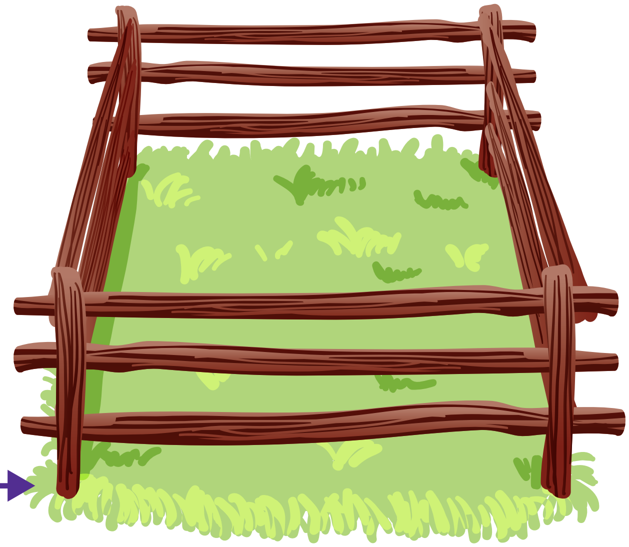
$$-7.2 + 4\frac{1}{2} = -7.2 + \frac{9}{2} = -7.2 + 4.5 = -2.7\text{ °C}$$

Observamos que $-\frac{27}{10} = -2\frac{7}{10}$ y $-\frac{27}{10} = -2.7$ °C,

por lo tanto $-2\frac{7}{10} = -2.7$ °C

Multiplicación de números decimales

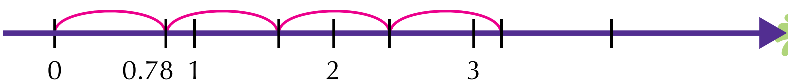
Analicemos las situaciones siguientes:



1. ¿Cuál es el perímetro de un corral cuadrangular que mide de lado 0.78 m?
   Recordemos que el perímetro es la suma los lados.

   0.78 m + 0.78 m + 0.78 m + 0.78 m = 3.12 m

   El perímetro del corral es de 3.12 m



Como la forma del corral es cuadrada, podemos calcular el perímetro multiplicando un lado por 4, así:

$$4 \times 0.78 \text{ m} = 3.12$$

se multiplica común y corriente y se separan tantas cifras decimales como tengan los factores, en este caso solo hay 2 cifras decimales.

Para multiplicar números decimales se procede como si fuera multiplicación de enteros y en el resultado, se separan el total de cifras decimales que hay en los factores.

2. Don Augusto compró 12.5 kg de un producto para su cultivo a razón de $845.75 el kg. ¿Cuánto dinero pagó en total?

   Solución

   Realizando la operación 12.5 x 845.75 o lo que es lo mismo 845.75 x 12.5 (recordemos la ley conmutativa que se cumple en toda multiplicación).

```
   845.75   ⟶ tiene 2 cifras decimales
   x 12.5   ⟶ tiene 1 cifra decimal
  --------
   422875
  169150
  84575
 ---------
10,571.875  ⟶ tiene 2+1= 3
               cifras decimales
```

División de números decimales

Estudiemos las situaciones siguientes:

1. Mauro, el cerrajero del pueblo, tiene que cortar un tubo de 526.6562 centímetros en 7 pedazos iguales. ¿Cuál es la longitud?

   Solución

   Sabemos que Mauro debe realizar la división.de 526.6562 entre 7.

```
526.6562 | 7
 36      | 75.2366
  16
   25
    46
     42
      0
```

Observa que solo el dividendo tiene decimales y el divisor no. En este caso, se efectúa la división como si fueran números enteros. Al bajar la primera cifra decimal, ponemos una coma en el cociente y continuamos dividiendo.

2. Leonardo tiene $25,000 para comprar un cereal que le cuesta a $6.25 el gramo ¿Cuántos kilogramos podrá comprar?

   Solución

   Leonardo debe realizar la división 25,000 entre 6,25.

   Para hacer la división 25,000 | 6.25

es necesario multiplicar ambos miembros por 100 para que desaparezcan las cifras decimales del divisor y se convierta en una división de enteros.

```
2500000 | 6,25
 000000 | 4000
```

Leonardo puede comprar 4,000 gramos del cereal, es decir 4 kilogramos, puesto que un kilogramo tiene 1,000 gramos.

Notación científica

Existen cantidades muy grandes llamadas astronómicas y muy pequeñas llamadas micrométricas.

Astronómicas como la distancia promedio entre la Tierra y el Sol que es de 150 millones de kilómetros.

Si la escribimos numéricamente sería 150,000,000 Km. y ¿Qué tal si la expresamos en metros? o ¿en centímetros? En metros sería 150,000,000,000 m y en centímetros quedaría 15,000,000,000,000.

Medidas micrométricas como el grosor de un cabello que es aproximadamente de 0.1 mm que en centímetro sería expresado como 0.01cm y en metros sería 0.0001m.

Números muy grandes y números muy pequeños, así escritos, son muy incómodos para operarlos.

Una manera cómoda y reducida a través de la notación científica.

Para aprender a escribir una cantidad enorme o diminuta en este tipo de notación, recordemos lo siguiente:

$10^0 = 1$	$10^0 = 1$
$10^1 = 10$	$10^{-1} = 0.1 = \frac{1}{10}$
$10^2 = 100$	$10^{-2} = 0.01 = \frac{1}{100}$
$10^3 = 1{,}000$	$10^{-3} = 0.001 = \frac{1}{1{,}000}$
$10^4 = 10{,}000$	$10^{-4} = 0.0001 = \frac{1}{10{,}000}$
$10^5 = 100{,}000$	$10^{-5} = 0.00001 = \frac{1}{100{,}000}$
$10^6 = 1{,}000{,}000$	$10^{-6} = 0.000001 = \frac{1}{1{,}000{,}000}$
.	.
.	.
.	.
$10^n = 10000000\ldots0$ (n ceros)	$10^{-n} = \underbrace{0.00000\ldots01}_{\text{n ceros}} = \frac{1}{\underbrace{100000\ldots0}_{\text{n ceros}}}$

Así, cualquier cantidad por grande o pequeña que sea puede ser escrita en la notación científica que es una notación en potencias de 10.

Por ejemplo:

$200 = 2 \times 100 = 2 \times 10^2$

$7{,}000 = 7 \times 1{,}000 = 7 \times 10^3$

$8{,}600 = 86 \times 100 = 8.6 \times 1{,}000 = 8.6 \times 10^3$

Observemos que se escribe una sola cifra significativa (distinta de 0), multiplicada por una potencia de 10.

$$0.9 = 9 \div 10 = \frac{9}{10} = 9 \times 10^{-1}$$

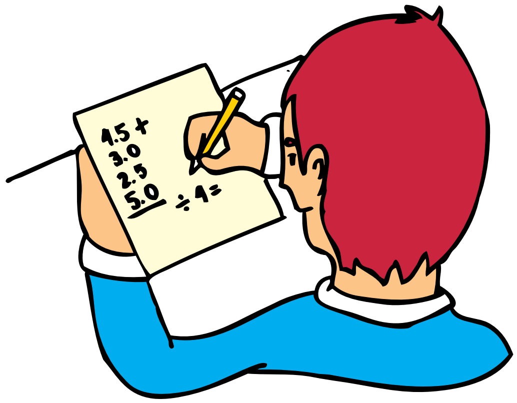
$$0.05 = \frac{5}{100} = 5 \times 10^{-2}$$

$$0.00000085 = 85 \div 1{,}000{,}000 = 8.5 \div 10{,}000{,}000 = 8.5 \times 10^{-7}$$

Del mismo modo, podemos expresar cantidades de notación científica en cantidad desarrollada, así por ejemplo:

El diámetro de la Tierra es aproximadamente de 1.3×10^7 metros.
La cantidad que corresponde a correr el punto 7 lugares a la derecha, es decir, multiplicar por 10,000,000
De tal modo que 1.3×10^7 metros. = 13,000,000 metros.

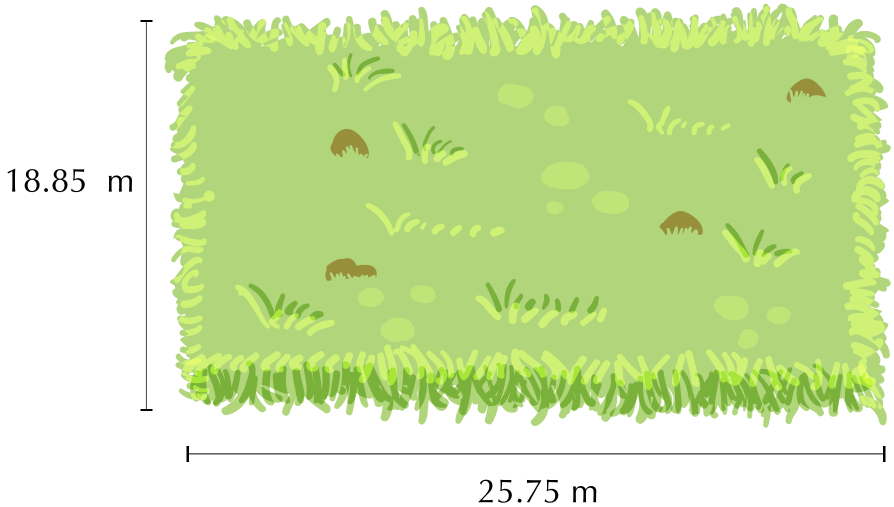
Aplicación



1. Las calificaciones de Mateo en matemáticas fueron: 3.5 ; 6.9 ; 8.6 y 6.8 sabiendo que aprueba desde 6.0, averigua si Mateo reprobó.

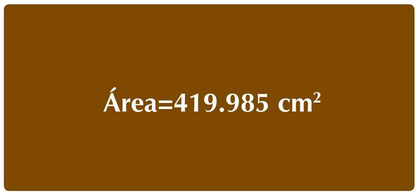
La información siguiente corresponde a los ejercicios 2 y 3.

Un lote tiene las dimensiones siguientes: 25.75 m de largo y 18.85 m de ancho.



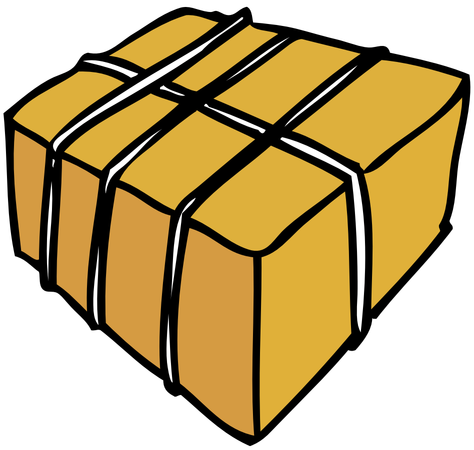
2. Calcula el perímetro del lote. (Contorno)
3. Calcula el área del lote. (Área rectángulo = base x altura)

4. Una tabla rectangular como la de la figura, tiene 27.45 cm por uno de sus lados y su área es 419.985 cm^2. ¿Cuál es su otra dimensión?



27.45 cm

5. Se quiere amarrar un paquete con un hilo grueso. En cada vuelta se van 3.75 m. Si se dan 4 vueltas y media y se gastan 0.125 m en el nudo o amarre. ¿Cuántos metros se gastan?



6. Según los estudios sobre las medidas calculadas en el sistema planetario, se cree que el diámetro del Sol es aproximadamente 1,390,000,000 metros. Expresa ese valor en notación científica.
7. Expresa como número decimal los racionales siguientes:

   a. $\frac{3}{2}$

   b. $\frac{16}{25}$

   c. $\frac{2}{9}$

   d. $\frac{8}{17}$

   e. $\frac{98}{37}$

8. Expresa en número racional los decimales siguientes:

   a. 0.654
   b. 89.3
   c. 7.592
   d. 91.6
   e. 0.006

Realiza las operaciones siguientes:

9.
   a $0.65 + 0.179 + 8.4 =$
   b $0.145 - 9.654 =$
   c $(6.94 + 12.5) - 0.28 =$

10.
   a $(0.65)(0.179) =$
   b $0.145 \div 9.654 =$
   c $(6.94 \div 12.5)(0.28) =$

Entendemos por…

Decimal periódico aquel decimal en el que los dígitos, en algún momento, comienzan a repetirse en bloques de uno o más números.

Por ejemplo: 0.18181818… escrito en notación de barras se escribe $0.\overline{18}$.

0.533333… escrito en notación de barras es: $0.5\overline{3}$.

Diversión matemática

Cifras faltantes

Lucho encontró un cartón con una igualdad a la que le faltaban unas cifras decimales. Ayúdalo a encontrarlas.

	7.		2	x	0.		=	1	5.		1	8

Día a día

Frutales colombianos

El Ministerio de Agricultura, calculaba que en 1997 había 167,359 hectáreas cultivadas con frutales en Colombia.

La distribución del área sembrada de frutas se presenta en la Tabla siguiente.

Área cultivada de frutales en Colombia y su distribución porcentual.

Fruta	Área (hectáreas)	Porcentaje del total
Banano	52,057	31.1
Cítricos	46,172	27.6
Guayaba	24,900	4.9
Piña	12,000	7.1
Aguacate	8,800	5.2
Otros (32 especies)	23,430	14
Total	**167,359**	**100**

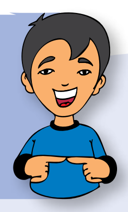
Fuente: Ministerio de Agricultura y Desarrollo Rural 1997
http://www.corpoica.org.co/SitioWeb/Archivos/Publicaciones/Frutalestropicalescartilla.pdf

Escribe en tu cuaderno la lista de frutas cultivadas según el área, de mayor a menor.

Este capítulo fue clave porque

- Aprendí a identificar los elementos del conjunto de los números racionales.
- Ahora sé comparar números racionales y establecer un orden entre ellos.
- Soy capaz de expresar un número racional en fracciones equivalentes.
- Interpreto cantidades escritas en notación científica.
- Sé expresar números racionales como números decimales y viceversa.
- Soluciono situaciones problema que requieren la aplicación de las operaciones con números racionales y /o decimales.

Conectémonos con la Música

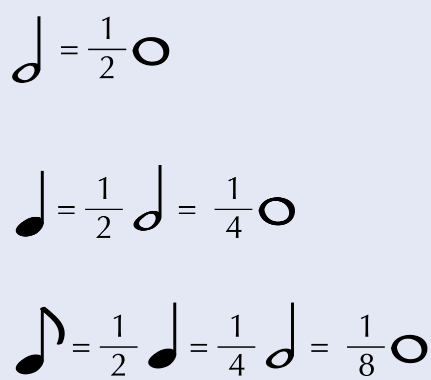


Las figuras musicales

Las figuras musicales nos permiten especificar la duración de un sonido.

A continuación pueden verse las figuras, sus nombres y sus valores: Como puede notarse, cada figura dura el doble de tiempo que la siguiente y la mitad del tiempo que la anterior.

Información tomada de: http://www.teoria.com/referencia/f/figuras.htm



Busca las equivalencias fraccionarias para semicorchea, fusa y semifusa.

Proporcionalidad

Ya hemos estudiado anteriormente qué es una razón y qué es una proporción, así como conocemos la ley fundamental de las proporciones.

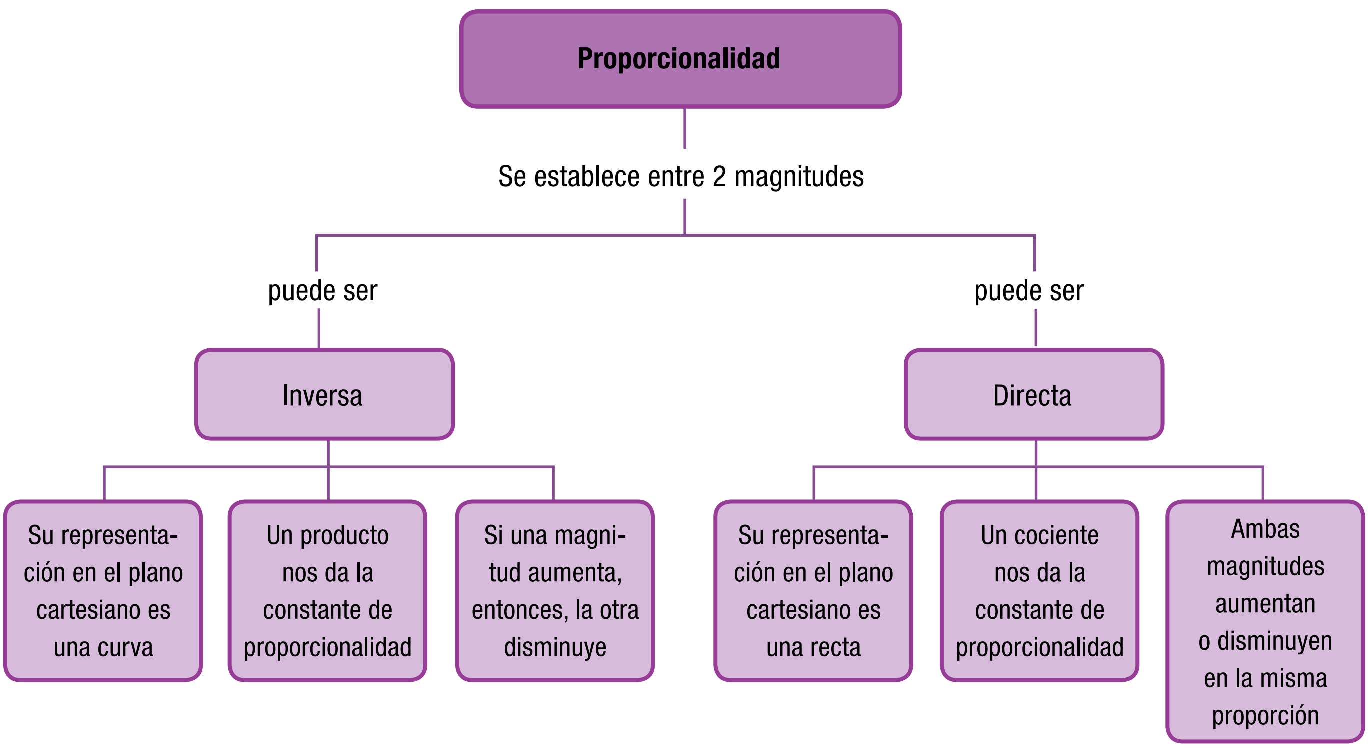
Ahora vamos a analizar los tipos de proporciones. Esto es, estudiaremos la proporcionalidad directa y la proporcionalidad inversa.

Hemos visto que la razón entre dos números es siempre un cociente (división) entre ellos.

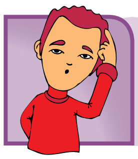
También hemos estudiado que la proporción es la igualdad de dos razones y que la ley fundamental de las proporciones nos enseña que en toda proporción, el producto de los medios es igual al producto de los extremos.

La proporcionalidad es una **relación** entre **magnitudes** medibles.

Entre dos magnitudes puede establecerse una proporción que puede ser: directa o inversa.



Tema 1. Proporción directa



Indagación

Reúnete con uno o dos compañeros para analizar esta situación.

Para construir un metro cuadrado de muro, se necesitan 12 bloques de ladrillo.

¿Cuántos bloques de ladrillo se necesitan para 2 metros cuadrados de muro?

¿Cuántos bloques de ladrillo se necesitan para 3 metros cuadrados de muro?

¿Cuántos bloques de ladrillo se necesitan para 4 metros cuadrados de muro?

¿Cuántos bloques de ladrillo se necesitan para 5 metros cuadrados de muro?

Intenta completar la tabla siguiente:

Metros cuadrados de muro	No. de bloques de ladrillo
1	12
2	
3	
4	
5	

Conceptualización

A Dorotea le encanta preparar exquisitas tortas para celebraciones especiales.

Normalmente, Dorotea prepara tortas para 16 personas pero esta vez le han pedido una torta para una reunión a la que han de asistir 64 personas.

Dorotea hace el razonamiento siguiente:

Para 16 personas necesito:

800 g de harina
600 g de mantequilla
16 huevos
480 g de azúcar

Para 32 personas necesito el doble que para 16, porque 32 es el doble de 16, entonces para 32 necesito:

800 g x 2 =1,600 g de harina
600 g x 2 = 1,200 g de mantequilla
16 x 2 = 32 huevos
480 g x 2 = 960 g de azúcar

Para 64 personas necesito el doble que para 32, porque 64 es el doble de 32, entonces para 64 necesito:

1,600 g x 2 = 3,200 g de harina
1,200 x 2 = 2,400 g de mantequilla
32 huevos x 2 = 64 huevos
960 g x 2 = 1,920 g de azúcar

Analicemos el razonamiento de Dorotea.

Ella sabe que para más personas, necesita más cantidad de cada ingrediente.

Dorotea dobla cada vez el número de personas y la cantidad de cada ingrediente, en la tabla siguiente:

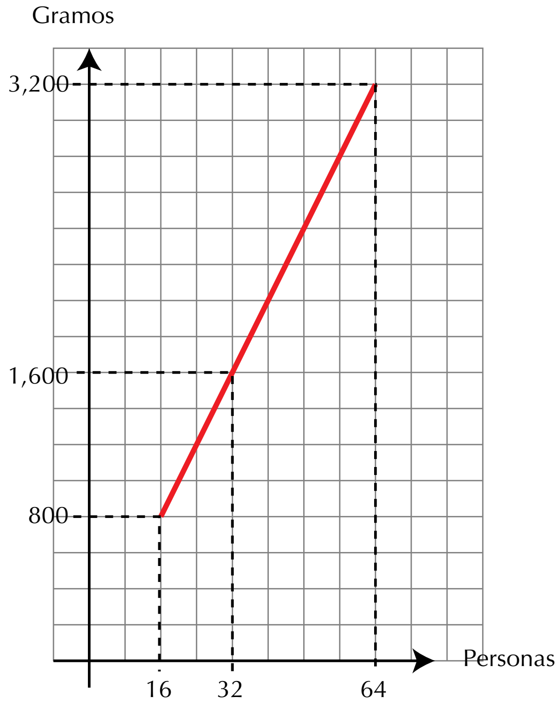
Personas	16	32	64
Harina en gramos	800	1,600	3,200
Mantequilla en gramos	600	1,200	2,400
Huevos	16	32	64
Azúcar en gramos	480	960	1,920

Luego el número de personas y los gramos de cada ingrediente son directamente proporcionales. Es decir, número de personas e ingredientes para la torta, son directamente proporcionales.

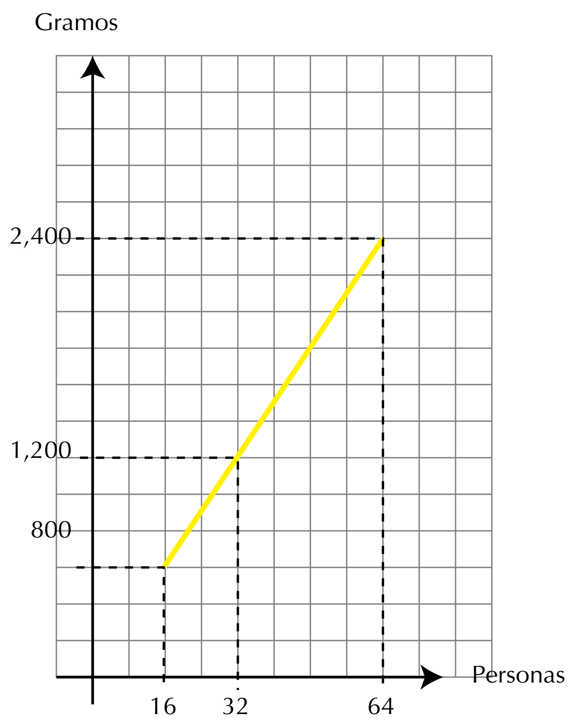
En general: Dos magnitudes son directamente proporcionales cuando al multiplicar o dividir una de ellas por un número, la otra queda multiplicada o dividida respectivamente por el mismo número.

Ahora, vamos a construir una gráfica cartesiana, para cada ingrediente.

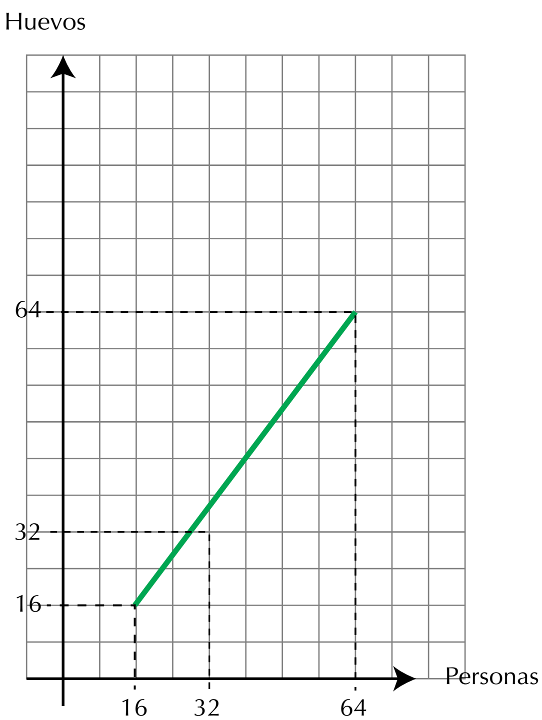
Harnina para las tortas de Dorotea



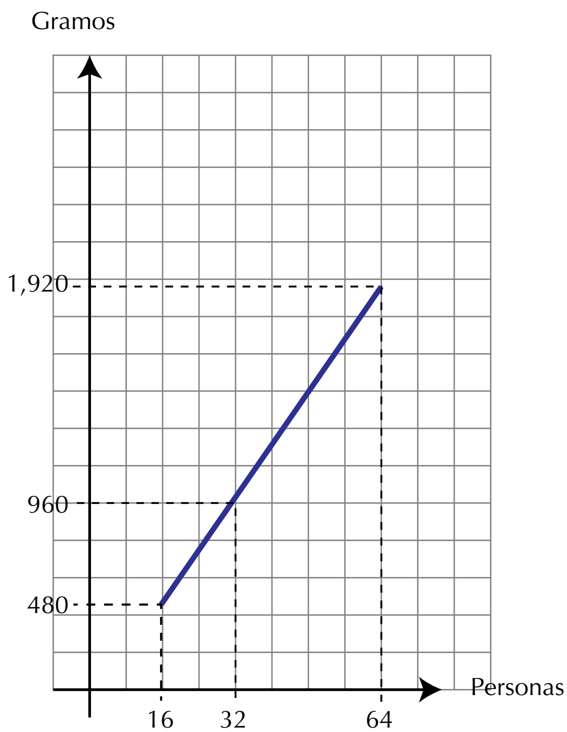
Mantequilla para las tortas de Dorotea



Huevos para la torta de Dorotea



Azucar para las tortas de Dorotea



Observemos que: La representación cartesiana de la proporción directa es una recta.

Veamos nuevamente la tabla de los ingredientes, presentada por Dorotea, y veamos el caso de la harina:

Personas	16	32	64
Harina en gramos	**800**	**1,600**	**3,200**
Mantequilla en gramos	600	1,200	2,400
Huevos	16	32	64
Azúcar en gramos	480	960	1,920

Analizando las proporciones de los ingredientes, según el número de personas, tenemos:

Para la harina: $\frac{800}{16} = \frac{3,200}{64}$

Según la ley fundamental de las proporciones

$$\underbrace{800 \times 64}_{51,200} = \underbrace{16 \times 3,200}_{51,200}$$

Recordemos las propiedades de las igualdades, que también se cumplen en las proporciones.

a. Cada razón es igual a sí misma. $\frac{800}{16} = \frac{800}{16}$

y $\frac{3,200}{64} = \frac{3,200}{64}$ propiedad reflexiva.

Toda razón es igual a sí misma.

b. Si $\frac{800}{16} = \frac{3,200}{64}$, entonces, $\frac{3,200}{64} = \frac{800}{16}$

propiedad simétrica.

Si una razón es igual a otra, entonces, ésta es igual a la primera.

c. Si $\frac{800}{16} = \frac{3,200}{64}$ y $\frac{3,200}{64} = \frac{1,600}{32}$ entonces,

$\frac{800}{16} = \frac{1,600}{32}$ propiedad transitiva.

Si una razón es igual a una segunda y esta es igual a una tercera, entonces, la primera razón es igual a la tercera.

Concluimos que la proporcionalidad es una relación de equivalencia por cumplir las propiedades: reflexiva, simétrica y transitiva.

Puedes hacer el mismo razonamiento para los demás ingredientes de la torta que hizo Dorotea.

Aplicación

Copia en tu cuaderno los ejercicios siguientes, resuélvelos planteando proporciones y compara con algunos compañeros.

1. Un automóvil consume 3 galones de gasolina por 120 km de recorrido ¿Cuantos kilómetros recorre con 20 galones?
2. En 50 litros de agua de mar hay 1,300 gramos de sal. ¿Cuántos litros de agua de mar contendrán 5,200 gramos de sal?
3. Con $5,000 pueden comprarse 4 helados. José quiere saber cuántos helados pueden comprarse con $17,500.
4. Por la venta de 3 libros de literatura, Nubia se gana $3,850. Si en un día Nubia vendió 11 de esos libros. ¿Cuánto dinero ganó ese día?
5. Si por 4 camisas se paga $ 240,000 ¿Cuánto se pagará por 1 camisa?
6. Cada que se talan 50 árboles mueren aproximadamente 250 especies de animales. ¿Cuántas especies de animales morirán, aproximadamente, cuando se talan 200 árboles?
7. En un asado se consume 1 libra de carne por cada 4 personas. ¿Cuántas libras serán necesarias para 25 personas?

   Resuelve las proporciones:

8. $\frac{10}{6} = \frac{10}{m}$

   Completa:

9. 1 es – 4 como – 10 es a ____________.
10. 75 es a 25 como $\frac{5}{6}$ es a _________________.

Entendemos por…

Proporción aquel enunciado matemático que establece que dos relaciones o cocientes son iguales. Por ejemplo: 8:4 = 20:10 (se lee: 8 es a 4 como 20 es a 10)

Diversión matemática

Escribe 4 múltiplos de 7 comprendidos entre 21 y 77

7				

Escribe 4 divisores de 200 comprendidos entre 10 y 100

200				

Día a día

Las frutas y los pesticidas

Los pesticidas son substancias que ayudan a proteger las plantas contra mohos, hongos, roedores e insectos. Los pesticidas ayudan a prevenir la pérdida de las cosechas y el desarrollo potencial de enfermedades en los humanos.

La exposición a los pesticidas puede suceder en el lugar de trabajo, a través de los alimentos y en el hogar o el jardín.

Para ayudar a protegerse a sí mismo y a la familia de los pesticidas sobre frutas y verduras, elimine las hojas externas de las verduras de hoja y luego enjuáguelas. Se aconseja pelar los productos agrícolas que tengan cáscara dura o enjuáguelos con abundante agua tibia mezclada con sal y jugo de limón o vinagre.

Otra alternativa sería comprar y servir productos agrícolas orgánicos, ya que los cultivadores de estos productos no usan pesticidas para producir sus frutas y verduras.

http://www.umm.edu/esp_ency/article/002430.htm

Tema 2. Proporción inversa

Indagación

Estudia la situación siguiente:

Cuatro albañiles hacen una construyen un muro en 6 horas.

¿En cuántas horas lo construirán ocho albañiles?

Piensa si 4 hombres emplearán más horas o menos horas que 8 hombres, para hacer el mismo trabajo.

Discute tus planteamientos, con dos o tres compañeros y lleguen a una conclusión.

Conceptualización

Después de la discusión anterior, vamos dejar en claro la solución.

Si se considera que el rendimiento en el trabajo del grupo, en la construcción del muro, es uniforme (no varía, siempre se trabaja al mismo ritmo) y si 4 hombres hacen la construcción en 6 horas, ¿qué sucede con el número de horas si aumenta o disminuye el número de albañiles, para realizar el mismo trabajo?

Nº de albañiles	Nº de horas de trabajo
4	6
8	3
12	2

En la tabla siguiente:

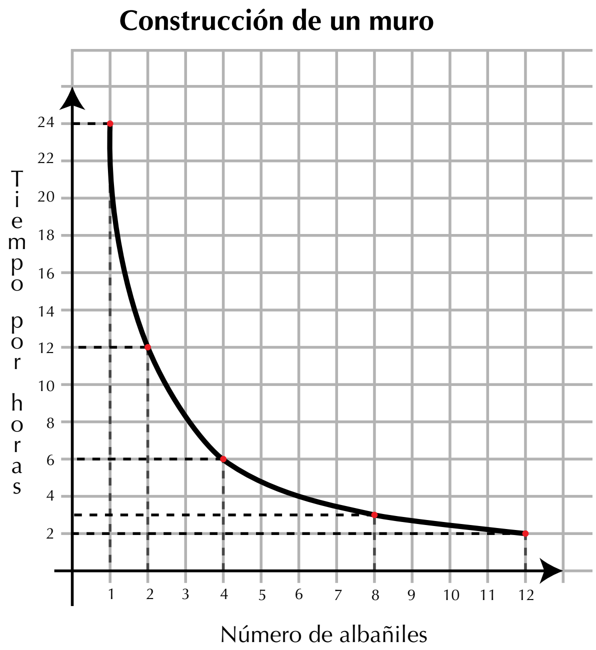
Observemos que a medida que se aumenta el número de albañiles, disminuye el número de horas de trabajo. Sin embargo, los productos de los números de ambas columnas son iguales:

$$4 \times 6 = 24$$
$$8 \times 3 = 24$$
$$12 \times 2 = 24$$

Ampliemos la tabla, con otros valores y hagamos la representación, en el plano cartesiano:

Nº de albañiles	Nº de horas de trabajo
1	24
2	12
3	8
4	6
6	4
8	3
12	2

En el eje de horizontal ubicamos el número de albañiles y en el eje vertical ubicamos el número de horas.



Podemos concluir que si el número de albañiles aumenta, disminuye el número de horas para realizar el trabajo, y viceversa, si disminuye el número de obreros, aumenta el número de horas, lo que significa que número de albañiles y número de horas para realizar el trabajo, son inversamente proporcionales.

Observemos que: La representación cartesiana de la proporción inversa es una curva.

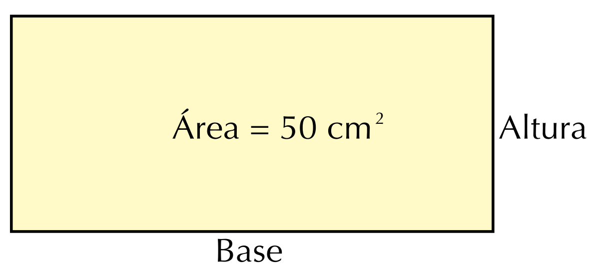
Aplicación

Copia los ejercicios en tu cuaderno, resuélvelos y comenta tus respuestas con tus compañeros.

Si el área de un rectángulo permanece constante, entonces, el largo de la base es inversamente proporcional a la altura.

La información siguiente debe ser utilizada para solucionar los ejercicios 1 a 3.

Dado un rectángulo de área 50 cm^2.



1. Si el rectángulo tiene una base de 8 cm, entonces ¿cuál es el valor de la altura?
2. Si el rectángulo tiene una altura de 4.5 cm, entonces ¿cuál es el valor de la base?

3. Si el rectángulo tiene una altura de 10 cm, entonces ¿cuál es el valor de la base?
4. Cuatro estudiantes hacen un trabajo en 14 días. ¿En cuántos días podrán hacer la misma obra 7 estudiantes?

Completa las tablas de proporcionalidad directa.

5.

1	2	3	7	
5	10			60

6.

1	2	3	4	
2.5		7.5	10	25

7.

2	4	6		
0.5	1		2	

Completa las tablas de proporcionalidad directa

8.

	2		5	10
20	10	5	4	2

9.

1		3	4	6
36	18	12		6

10. Encuentra el valor de la letra en la proporción:

$$\frac{\boxed{a}}{\boxed{\frac{2}{3}}} = \frac{\boxed{\frac{1}{2}}}{\boxed{\frac{1}{6}}}$$

Entendemos por…

Inverso en la suma, al opuesto de un número, conocido como el inverso aditivo.

Por ejemplo el inverso aditivo de $\frac{8}{5}$ es $-\frac{8}{5}$.

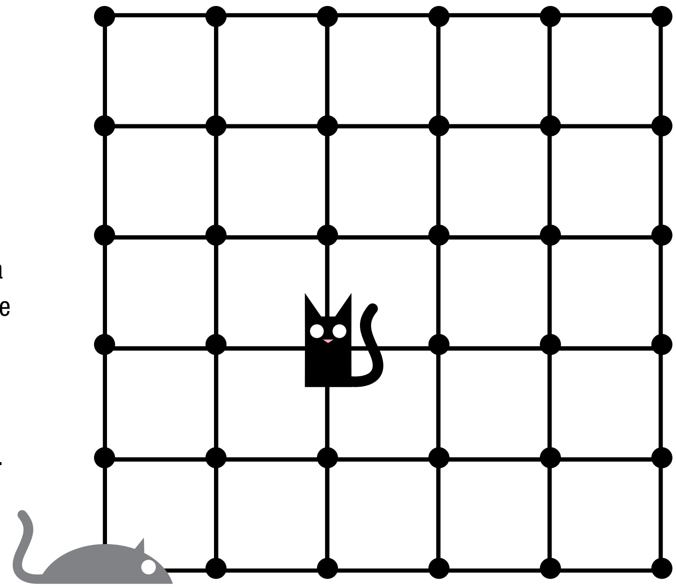
Recíproco, también es llamado inverso multiplicativo, al número que multiplicado por otro da 1. Por ejemplo, el

recíproco de $\frac{8}{5}$ es $\frac{8}{5}$ porque $\frac{8}{5} x \frac{5}{8} = \frac{8 x 5}{5 x 8} = \frac{40}{40} = 1$.

Diversión matemática

El gato y el ratón

El gato captura el ratón en menos de 10 movimientos.
Juega con otro compañero.
Cada uno con una ficha de diferente color. Una ficha se ubica en el sitio de la imagen del gato y la otra en la imagen del ratón.
El gato se mueve primero deslizando la ficha por la línea negra, un espacio en cualquier dirección adyacente entre dos puntos, intentando capturar el ratón.
El ratón debe evitar que esto suceda.
El gato gana si captura al ratón en menos de 10 movimientos, pero si no lo captura, entonces, gana el ratón.

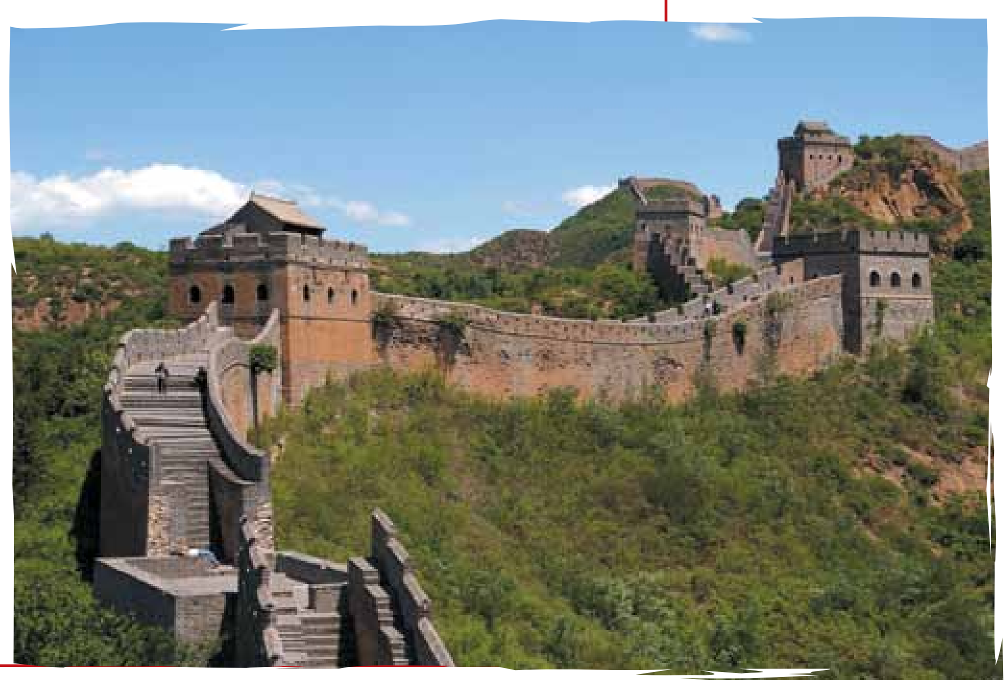


Día a día

La gran muralla china

La muralla china es una de las 7 maravillas del mundo.
Unos 300,000 trabajadores construyeron esta muralla, que empieza en el mar, junto a la pequeña ciudad de Chan-Hai-Kuan, y continúa durante 2,450 kilómetros, atravesando valles y montañas, torrentes y ríos.
De esta forma con tantos trabajadores construyéndola el tiempo que se tardaron fue mucho menor que si hubieran sido los 200,000 que se habían pensado en un principio.

http://es.wikipedia.org/wiki/Gran_Muralla_China



Este capítulo fue clave porque

- Ahora diferencio una relación directamente proporcional de una proporción inversamente proporcional.
- Calculo algún dato faltante en una proporción, aplicando la ley fundamental de las proporciones.
- Soluciono situaciones en las que intervienen problemas que requieren el planteamiento de proporciones tanto directas como indirectas.

Conectémonos con el dibujo

Las proporciones en la figura humana

Cuando hablamos de proporciones nos referimos a la relación de medidas que se establecen en el dibujo entre las partes y el todo. La belleza y atractivo de un dibujo depende, en gran parte de sus proporciones.

Existen determinadas proporciones, que por su equilibrio, satisfacen de manera natural la percepción.

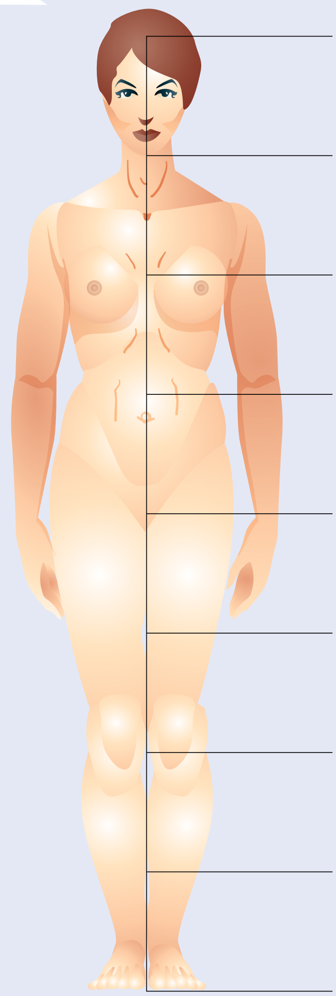
El dibujo de la figura se debe regir por dos cuestiones por parte del dibujante de las proporciones entre cada uno de los miembros del personaje o del modelo representado.

La finalidad del estudio de las proporciones para el dibujo es dejar establecida la pauta por la cual se rigen las diferentes medidas del cuerpo.

La proporción sistematizada por una corriente artística o por una época se acaba convirtiendo en el canon de la misma dicho de otra forma, cada época configura un canon propio para la representación del ser humano, estableciéndose en cada momento la medida para cualquiera de las partes de su cuerpo. Dentro del estudio anatómico deben establecerse una serie de cánones o medidas que sirvan de base para el estudio comparativo de los diferentes miembros del cuerpo.

A través de la Historia del Arte se ha observado un cambio constante en el canon de las proporciones humanas.

Cada época se ha servido del dibujo para establecer las medidas consideradas como ideales, por lo que tales proporciones han tenido constantemente un punto de referendo acorde con el gusto estético del momento.



Desde la antigüedad, se ha venido utilizando el canon griego como proporción ideal: la altura total del cuerpo humano de pie equivale a la suma de siete veces la altura de su cabeza.

La proporción áurea o sección dorada, es otro método que puede utilizarse para la realización de dibujos y que consiste básicamente en la división de una línea recta de tal manera que la parte más pequeña sea a la parte más grande como la parte más grande es al total.

Es interesante conocer estas convenciones para poder aplicarlas si lo deseamos, pero debemos ser conscientes que la desproporción puede ser utilizada deliberadamente para expresar sensaciones, sentimientos e ideas.

http://como-dibujar.blogspot.com/2008/06/proporciones-humanas.html
http://pategraficasincamisa.blogspot.com/2007/03/pasos-para-realizar-una-obra-de-dibujo.htm

Repasemos lo visto

Al iniciar la unidad te preguntábamos si siempre podemos dividir un número entre otro no nulo.

Ahora creemos tener claro lo siguiente:

- En el conjunto de los números naturales, no es posible quitar a un número, otro número mayor.

- En el conjunto de los números enteros, solucionamos el problema que no tiene solución en los naturales, pero aquí tampoco tienen respuesta todas las divisiones.

- En el conjunto de los números racionales, ya es posible solucionar todas las divisiones y demás operaciones, por lo que concluimos que: El conjunto de los números racionales es más amplio que el conjunto de los números enteros y el conjunto de los números enteros es más amplio que el conjunto de los números naturales.
  En otras palabras: Todo número natural es entero y todo número entero es racional.
  Simbólicamente: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.
  Se lee:"Los naturales están contenidos en los enteros y los enteros están contenidos en los racionales".

- Cuando la variación proporcional es directa, las cantidades aumentan o disminuyen al mismo tiempo.

- Cuando la variación proporcional es inversa, una cantidad aumenta en tanto que la otra disminuye y viceversa.

Mundo rural

La palma de aceite

La palma de aceite es una planta tropical propia de climas cálidos que crece en tierras por debajo de los 500 metros sobre el nivel del mar. Su origen se ubica en el golfo de Guinea en el África occidental y su denominación popular: palma africana de aceite.

Colombia es el primer productor de palma de aceite en América Latina y el cuarto en el mundo.

En una palma de aceite se contonean alegres flores masculinas y femeninas, de las que nacen frutos por millares, esféricos, ovoides o alargados, para conformar racimos compactos de entre 10 y 40 kilogramos de peso. Antes de adquirir el alegre y vistoso color anaranjado rojizo del sol tropical que les brinda la madurez, los frutos son de color violeta oscuro, casi negro. En su interior guardan una única semilla, la almendra o palmiste, que protegen con el cuesco, un endocarpio leñoso rodeado, a su vez, por una pulpa carnosa. Ambas, almendra y pulpa, proveen aceite con generosidad.

La primera, el de palmiste, y la segunda, el de palma propiamente dicho.

La palma de aceite es un cultivo perenne y de tardío y largo rendimiento ya que la vida productiva puede durar más de 50 años, pero desde los 25 se dificulta su cosecha por la altura del tallo.

El procesamiento de los frutos de la palma de aceite se lleva a cabo en la planta de beneficio o planta extractora. En ella se desarrolla el proceso de extracción del aceite crudo de palma y de las almendras o del palmiste.

El proceso consiste en esterilizar los frutos, desgranarlos, macerarlos, extraer el aceite de la pulpa, clarificarlo y recuperar las almendras del bagazo resultante.

De las almendras se obtienen dos productos: el aceite de palmiste y la torta de palmiste que sirve para alimentos animal.

Al fraccionar el aceite de palma se obtienen también dos productos: la oleína y la estearina de palma.

La primera es líquida en climas cálidos y se puede mezclar con cualquier aceite vegetal. La otra es la fracción más sólida y sirve para producir grasas, principalmente margarinas y jabones. Las propiedades de cada una de las porciones del aceite de palma explican su versatilidad, así como sus numerosas aplicaciones.

Actualmente, es el segundo aceite más consumido en el mundo y se emplea como aceite de cocina, para elaborar productos de panadería, pastelería, confitería, heladería, sopas instantáneas, salsas, diversos platos congelados y deshidratados, cremas no lácteas para mezclar con el café.

A su vez, los aceites de palma y palmiste sirven de manera especial en la fabricación de productos oleoquímicos como los ácidos grasos, ésteres grasos, alcoholes grasos, compuestos de nitrógeno graso y glicerol, elementos esenciales en la producción de jabones, detergentes, lubricantes para pintura, barnices, gomas y tinta.

En los últimos tiempos ha venido tomando fuerza su utilización como biocombustible. El biodiesel en la actualidad es una nueva alternativa para la utilización del aceite de palma como materia prima de otros productos.

Tomado de: http://www.fedepalma.org/palma.htm

Dato curioso

El difícil caso de la herencia resuelto por el hombre que calculaba

"Encontramos, cerca de una antigua posada medio abandonada, tres hombres que discutían acaloradamente al lado de un lote de camellos. Furiosos se gritaban improperios y deseaban plagas:

– ¡No puede ser! – ¡Esto es un robo! – ¡No acepto! El inteligente Beremís trató de informarse de qué se trataba. Somos hermanos – dijo el más viejo – y recibimos, como herencia, esos 35 camellos. Según la expresa voluntad de nuestro padre, debo yo recibir la mitad, mi hermano Hamed Namir una tercera parte, y Harim, el más joven, una novena parte. No sabemos sin embargo, como dividir de esa manera 35 camellos, y a cada división que uno propone protestan los otros dos, pues la mitad de 35 es 17 y $\frac{1}{2}$ ¿Cómo hallar la 3ª parte y la 9ª parte de 35, si tampoco son exactas las divisiones?

– Es muy simple. – respondió el "Hombre que calculaba" – Me encargaré de hacer con justicia esa división si me permitís que junte a los 35 camellos de la herencia, este hermoso animal que hasta aquí nos trajo en buena hora. Traté en ese momento de intervenir en la conversación:

– ¡No puedo consentir semejante locura! ¿Cómo podríamos dar término a nuestro viaje si nos quedáramos sin nuestro camello?

– No te preocupes del resultado "bagdalí"– replicó en voz baja Beremís –. Sé muy bien lo que estoy haciendo. Dame tu camello y verás, al fin, a que conclusión quiero llegar. Fue tal la fe y la seguridad con que me habló, que no dudé más y se lo entregué. Inmediatamente lo juntó con los 35 camellos que allí estaban para ser repartidos entre los tres herederos. – Voy, amigos míos – dijo dirigiéndose a los tres hermanos – a hacer una división exacta de los camellos, que ahora son 36.

Y volviéndose al más viejo de los hermanos, así le habló: – Debías recibir, amigo mío, $\frac{1}{2}$ de 35, o sea 17 y $\frac{1}{2}$. Recibirás en cambio $\frac{1}{2}$ de 36, o sea, 18. Nada tienes que reclamar, pues es bien claro que sales ganando con esta división. Dirigiéndose al segundo heredero continuó: – Tú, Hamed Namir, debías recibir $\frac{1}{3}$ de 35, o sea, 11 y $\frac{2}{3}$. Vas a recibir $\frac{1}{3}$ de 36, o sea 12. No podrás protestar, porque también es evidente que ganas en el cambio. Y dijo, por fin, al más joven: – A ti, joven Harim Namir, que según voluntad de tu padre debías recibir $\frac{1}{9}$ de 35, o sea, 3 y $\frac{8}{9}$ de otro, te daré $\frac{1}{9}$ de 36, es decir, 4, y tu ganancia será también evidente, por lo cual sólo te resta agradecerme el resultado. Luego continuó diciendo: – Por esta ventajosa división que ha favorecido a todos vosotros, tocarán 18 camellos al primero, 12 al segundo y 4 al tercero, lo que da un resultado (18 + 12 + 4) de 34 camellos. De los 36 camellos sobran, por lo tanto, dos.

Uno pertenece, como saben, a mi amigo el "bagdalí" y el otro me toca a mí, por derecho, y por haber resuelto a satisfacción de todos, el difícil problema de la herencia. – ¡Sois inteligente, extranjero! – exclamó el más viejo de los tres hermanos-.

Aceptamos vuestro reparto en la seguridad de que fue hecho con justicia y equidad."

Tomado de "El hombre que calculaba" de Malba Tahan (1895-1974)
http://www.librosmaravillosos.com/hombrecalculaba/capitulo03.html

Opina a cerca del caso de la herencia y discútelo con algunos compañeros.

¿En qué vamos?

Reflexiono y trabajo con mis compañeros

Resuelve cada ejercicio en tu cuaderno y revisa tus repuestas con algunos compañeros.

1. Las organizadoras de una fiesta comisión adquirieron 2.5 kg de pasabocas, pero esta cantidad fue insuficiente, por lo que tuvieron que comprar $\frac{3}{4}$ kg más. ¿Cuántos kg de pasabocas compraron en total?
2. Juanita adquirió $3\frac{1}{5}$ m de tela para realizar un trabajo de corte y confección, pero solo utilizó $\frac{7}{8}$ m ¿Cuánta cantidad de tela le quedó?
3. Calcula los kilómetros que recorrió un ciclista en tres etapas: en la primera recorrió $15\frac{3}{4}$ km; en la segunda, $18\frac{2}{8}$ km y en la tercera $18\frac{2}{8}$ km.
4. Un alumno del grupo pesaba $52\frac{3}{7}$ kg al principio del curso, y ha perdido $5\frac{2}{3}$ kg. ¿Cuánto pesa actualmente?
5. Ángel comió $\frac{3}{8}$ de $\frac{1}{2}$ pastel de fresa. ¿Qué parte del pastel comió?
6. Un kilómetro es aproximadamente $\frac{5}{8}$ de una milla. ¿Cuántos kilómetros hay en $\frac{6}{4}$ de milla?

Encuentra el resultado de las siguientes operaciones, sin que olvides simplificar tus resultados.

7.

a. $\frac{4}{6} x \frac{2}{3} =$

b. $3\frac{2}{5} x6 =$

c. $\frac{3}{4} \div - 8 =$

d. $\frac{4}{7} \div \frac{7}{4} =$

8.

a. $\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{2}{3}\right) =$

b. $\left(\frac{-8}{7}\right)^3 =$

c. $\sqrt{\frac{25}{81}} =$

d. $\sqrt{\frac{25}{81}} + \sqrt{\frac{16}{9}} =$

9.

a. Convierte 0.245 en fracción común y simplifica.
b. Convierte 5/8 en decimal.
c. Convierte 2 ¾ en fracción común.

10. Escribe frente a cada pareja de magnitudes si son proporcionalmente directas o proporcionalmente inversas.

a. Artículos vendidos - ganancia obtenida ______________________
b. Velocidad – tiempo empleado ______________________
c. Presión – volumen ______________________
d. Talla de vestido - cantidad de tela ______________________

Le cuento a mi profesor

Con tu profesor, resuelve la siguiente rejilla.
Lee el enunciado y señala con una x la categoría correspodiente, según lo que has aprendido.

Qué sé hacer	Superior	Alto	Básico	Bajo
Describo las clases de equivalencia de números racionales dados.				
Establezco relaciones de orden entre dos o más números racionales.				
Ubico elementos del conjunto de los números racionales, en la recta numérica.				
Sumo correctamente números racionales de igual denominador				
Sumo correctamente números racionales de diferente denominador				
Multiplico correctamente números racionales.				
Divido correctamente números racionales.				
Elevo correctamente, un número racional a un exponente dado.				
Extraigo raíces exactas de números racionales.				
Reconozco las propiedades de la adición de números racionales.				
Reconozco las propiedades de la multiplicación de números racionales.				
Identifico magnitudes directamente proporcionales.				
Identifico magnitudes inversamente proporcionales.				
Resuelvo problemas que requieren el planteamiento de proporciones directas.				
Resuelvo problemas que requieren el planteamiento de proporciones inversas.				

Autoevaluación

Participo y aprendo	Superior	Alto	Básico	Bajo
Permito la discusión entre los compañeros.				
Participo activamente en clase.				
Doy la razón a quien la tiene.				
Apoyo el trabajo en grupo.				
Ayudo a aclarar las dudas a mis compañeros.				
Contribuyo con la disciplina del curso.				
Me intereso por avanzar en mi aprendizaje.				
Propongo actividades para resolver en clase.				
Asisto puntualmente al colegio.				
Realizo las tareas en mi cuaderno				
Repaso lo ejercitado en clase.				
Reconozco la labor de mi profesor.				

Álgebra

Resolvamos

Te has preguntado: ¿para qué sirve el álgebra?

El álgebra es una invención de los árabes y se expandió por Europa en el siglo XII.

La utilización de letras en las matemáticas se remonta a la época de los griegos que escribían los números mediante letras. Lo mismo puede decirse de la cultura romana.

Hacia el siglo XVI, los matemáticos ya se habían dado cuenta de que sería mejor tener símbolos para una "cosa" que se buscaba, es decir, para la "incógnita" (x) y para los números que intervenían en las ecuaciones cuando no importaba qué números concretos debían ser.

Sin embargo, el álgebra comienza cuando los matemáticos empiezan a interesarse por las operaciones que se pueden hacer con "cualquier número". Ese "cualquier número" se representa con una letra, y se da así el paso de la aritmética al álgebra que es la generalización.

En esta unidad, entonces, estudiaremos las expresiones algebraicas y operaciones entre ellas, así como simplificaciones y funciones, sobre los números enteros y los racionales.

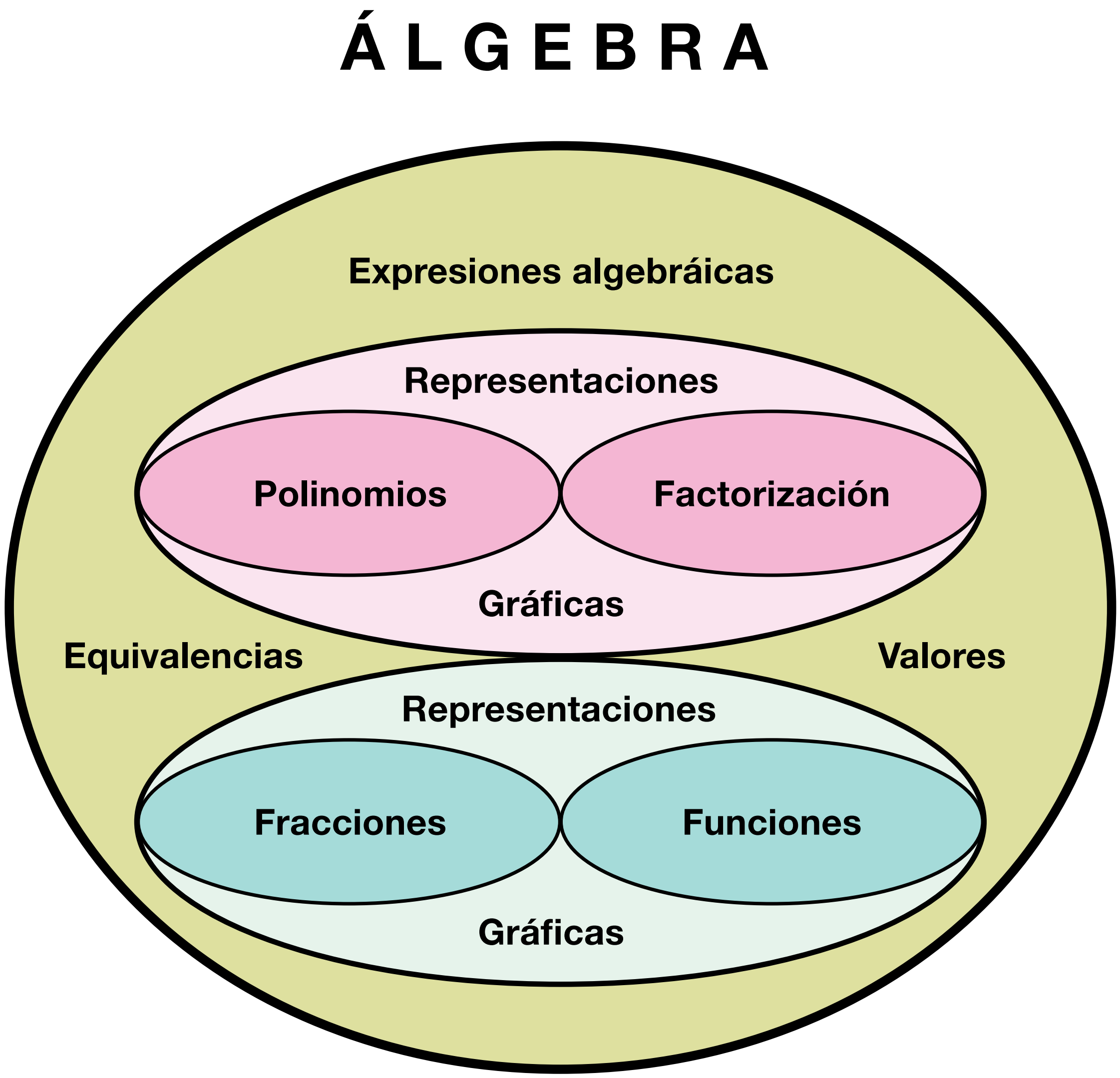
Referentes de calidad	Capítulos
Identifico relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas.	1. Expresiones algebraicas 2. Fracciones algebraicas y funciones
Construyo expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada.	
Uso procesos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas.	
Modelo situaciones de variación con funciones polinómicas.	
Identifico la relación entre los cambios en los parámetros de la representación algebraica de una familia de funciones y los cambios en las gráficas que las representan.	
Analizo en representaciones gráficas cartesianas los comportamientos de cambio de funciones específicas pertenecientes a familias de funciones polinómicas, racionales, exponenciales y logarítmicas.	

Expresiones algebraicas

Las expresiones algebraicas se componen de letras y números y forman los llamados polinomios.

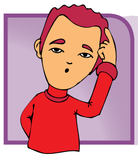
Ellos son parte del lenguaje algebraico.

Los polinomios no solo están en la base de la informática, la economía, los cálculos de intereses y en gestiones hipotecarias que se realizan con expresiones polinómicas, sino que también se encuentran en la medicina y otras ramas de la ciencia, que avanzan también gracias a esta herramienta algebraica.



Tema 1. Operaciones entre polinomios

Indagación



Ayudemos a Lucho en la solución de la situación que se le ha presentado. Necesita adquirir 3 unidades de un artículo, 5 unidades de otro y 2 unidades de otro diferente.

Si la unidad del primero vale \$25,000; la del segundo, \$5,000 más que la del primero y la unidad del tercero vale \$5,000 menos que la del primero, Lucho quiere saber cuánto paga por cada clase de artículo y cuánto paga en total.

Reúnete con dos compañeros para discutir la situación de Lucho y proponer soluciones. Comparen sus propuestas con las de otros grupos.

Conceptualización

Polinomios

Los polinomios son expresiones algebraicas compuestas por términos.

Recordemos que un término algebraico consta de signo, coeficiente, parte literal y exponente:

signo

coeficiente

$$-\frac{2}{4}b^3$$

exponente

parte literal

Cuando tenemos una expresión formada por varios términos, la denominamos **polinomio**.

Si consta de 1 solo término, se llama **monomio**. Ejemplo: $-8x^5$.

Si consta de 2 términos, se llama **binomio**. Ejemplo: $5x^2 - 7xy^3$.

Si consta de 3 términos, se llama **trinomio**. Ejemplo: $-4x + \frac{2}{3}xy^3 - 6xy^4$.

Si consta de más de 3 términos se llama polinomio del número de términos correspondiente:

ejemplo: $-2x + \frac{1}{5}x^2y^3 - 3x^3y^4 + 9x^7y^5 - 1$ es un **polinomio de 5 términos**.

El grado de un polinomio, está dado por el mayor exponente que tenga su parte literal.

Así:

$-8x^5$ es un monomio de grado 5.

$5x^2 - 7xy^3$ es un binomio de grado 3.

$-4x + \frac{2}{3}xy^3 - 6xy^4$ es un trinomio de 4º grado.

$2x + \frac{1}{5}x^2y^3 - 3x^3y^4 + 9x^7y^5 - 1$ es un polinomio de cinco términos de grado 7.

Si un término no tiene parte literal, se llama **término independiente**, como en el polinomio anterior: 1 es el término independiente.

Valor numérico de una expresión algebraica

Julián y Mary juegan con las matemáticas.

Julián le pregunta a Mary: ¿cuánto vale 5m, si m es igual a 10?

Mary responde: ¡Pues 5 por 10, o sea, 50!

Ahora Mary le pregunta: si A vale 1, M vale 2 y E vale 3, ¿cuánto vale A + M + E?

Julián le contesta: 1 + 2 + 3, o sea 6.

Dado un polinomio y los valores que tome la parte literal, podemos encontrar el valor numérico del polinomio. Por ejemplo:

Dado el polinomio: $-2x + \frac{1}{5}x^2y^3 - 3x^3y^4 + 9x^4y^5 - 1$

y los valores $x = \mathbf{0}$ y $y = \mathbf{-1}$, encontremos el valor numérico del polinomio dado.

Veamos: $-2x + \frac{1}{5}x^2y^3 - 3x^3y^4 + 9x^4y^5 - 1$

Como $x = 0$ y $y = -1$, entonces reemplazamos esos valores en la expresión:

$$-2x + \frac{1}{5}x^2y^3 - 3x^3y^4 + 9x^4y^5 - 1 = -2(\mathbf{0}) + \frac{1}{5}(\mathbf{0})^2(\mathbf{-1})^3 - 3(\mathbf{0})^3(\mathbf{-1})^4 + 9(0)^4(\mathbf{-1})^5 - 1$$

$$= 0 + 0(-1) - 0(1) + 0(-1) - 1$$

$$= 0 + 0 - 0 + 0 - 1$$

$$= 0 - 1$$

$$= -1$$

Operaciones entre polinomios: suma o adición de polinomios

Analicemos las operaciones siguientes:

1. Tenemos los polinomios: **$5a + 7b - c^3$** y **$-8a - 2b + 4c^3$** y nos piden sumarlos.

Solución

Los polinomios pueden adicionarse reuniendo sus términos semejantes, esto es, reuniendo aquellos términos que tengan idéntica parte literal (letra y exponente igual), por ejemplo, en los dos polinomios dados los términos **5a** y **-8a** son semejantes, **+7b** y **2b** también ellos dos son semejantes y, finalmente, **-c3** y **$+4c^3$** también lo son.

De tal modo que la operación suma queda así:

$$(5a + 7b - c^3) + (-8a - 2b + 4c^3) = \underbrace{(5a + (-8a))}_{-3a} + \underbrace{(7b + (-2b))}_{5b} + \underbrace{(-c^3 + (4c^3))}_{3c^3}$$

$$= -3a + 5b + 3c^3$$

Por tanto, la suma del polinomio **$5a + 7b - c^3$** con el polinomio **$-8a - 2b + 4c^3$** da el polinomio **$-3a + 5b + 3c^3$**.

Otra manera de realizar la suma de dos polinomios es sumando verticalmente un término debajo del otro semejante, es decir que tengan la misma parte literal y los mismos exponentes:

Recordemos que en el conjunto de los enteros y de los racionales, la resta

$$\begin{array}{rcrcr} 5a & + & 7b & - & c^3 \\ -8a & - & 2b & + & 4c^3 \\ \hline -3a & + & 5b & + & 3c^3 \end{array}$$

se convierte en suma.

Así, realizamos las restas convertidas en sumas:

2.

a. De 5a restar 8a es equivalente a sumarle a 5a el negativo 8a:

$$5a - 8a = 5a + (-8a) = -3a$$

b. Realizar la resta **7b - 2b:**

Restarle **2b** a **7b** es lo mismo que sumarle **(-2b)** a **7b**, entonces queda así:

$$7b - 2b = 7b + (-2b) = +5b = 5b$$

c. **$-c^3 + 4c^3 = -1c^3 + 4c^3 = +3c^3 = 3c^3$:**

2. Al binomio $\frac{6}{5}x^2 + \frac{1}{4}m^4$ restarle el trinomio $-x^2 + \frac{1}{2}m^4 - 3$

Solución

Convertimos la resta en suma de opuesto así:

$$\left[\frac{6}{5}x^2+\frac{1}{4}m^4\right]-\left[-x^2+\frac{1}{2}m^4-3\right]-\left[\frac{6}{5}x^2+\frac{1}{4}m^4\right]\overbrace{+x^2-\frac{1}{2}m^4+3}^{\text{Operamos Signos}}=\left[\frac{6}{5}x^2+\frac{1}{4}m^4\right]+\left[x^2-\frac{1}{2}m^4+3\right]=$$

Reuniendo los términos semejantes, y amplificando las fracciones para volverlas homogéneas:

$$\left[\frac{6}{5}x^2+x^2\right]+\left[\frac{1}{4}m^4-\frac{1}{2}m^4\right]+3=\left[\frac{6}{5}x^2-\frac{5}{5}x^2\right]+\left[\frac{1}{4}m^4-\frac{1\times 2}{1\times 2}m^4\right]+3$$

Realizando las operaciones indicadas nos queda:

$$\left[\frac{6}{5}x^2-\frac{5}{5}x^2\right]+\left[\frac{1}{4}m^4-\frac{1\times 2}{2\times 2}m^4\right]+3=+\frac{1}{5}x^2+\left[\frac{1}{4}m^4-\frac{2}{4}m^4\right]+3$$

$$=+\frac{1}{5}x^2+\left[-\frac{1}{4}m^4\right]+3$$

$$=\frac{1}{5}x^2-\frac{1}{4}m^4+3$$

Luego el binomio $\frac{6}{5}x^2+\frac{1}{4}m^4$ menos el trinomio $-x^2+\frac{1}{2}m^4-3$ es igual a $\frac{1}{5}x^2-\frac{1}{4}m^4+3$

Producto o multiplicación de polinomios

Multiplicamos un polinomio por otro como lo hacemos en aritmética, es decir que al multiplicar una cantidad por otra tenemos también cuidado de operar los exponentes, como lo hemos visto antes.

Estudiemos el desarrollo de las multiplicaciones siguientes:

1. $\frac{2}{7}y^2$ multiplicado por $-\frac{1}{3}y$

Solución

$$\left[\left[\frac{2}{7}y^2\right]\left[-\frac{1}{3}y\right]\right]=\left[\frac{2}{7}\right]\left[-\frac{1}{3}\right]\left[y^2\right]\left[y\right]=\left[\frac{2x\,(-1)}{7\times 3}\right]\left[y^2\,y\right]=-\frac{2}{21}y^3$$

2. Realizar $9m^5 - 12n^3 + 4r^2$ por $5m^3 - n + 2$

Solucion

La operación $(9m^5 - 12n^3 + 4r^2)(5m^3 - n + 2)$ podemos realizarla de dos maneras y nos da igual.
Una manera es multiplicando cada término del primer polinomio por cada término del segundo polinomio:

$$(9m^5 - 12n^3 + 4r^2)(5m^3 - n + 2) = 9m^5(5m^3 - n + 2) - 12n^3(5m^3 - n + 2) + 4r^2(5m^3 - n + 2)$$

Aplicando la propiedad distributiva del producto con respecto a la adición, tenemos:

$$9m^5(5m^3 - n + 2) - 12n^3(5m^3 - n + 2) + 4r^2(5m^3 - n + 2) =$$

$$(9m^5)(5m^3) + (9m^5)(-n) + (9m^5)(2) - 12n^3(5m^3) - 12n^3(-n) - 12n^3(2) + 4r^2(5m^3) + 4r^2(-n) + 4r^2(2)$$

$$= 45m^{5+3} - 9m^5n + 18m^5 - 60m^3n^3 + 12n^{3+1} - 24n^3 + 20r^2m^3 - 4r^2n + 8r^2$$

$$= 45m^8 - 9m^5n + 18m^5 - 60m^3n^3 + 12n^4 - 24n^3 + 20r^2m^3 - 4r^2n + 8r^2$$

Recordemos que para sumar dos términos tienen que ser semejantes, es decir, deben tener idéntica parte literal. Así, por ejemplo, no podemos sumar $-9m^5n$ con $18m^5$, porque los dos términos no tienen la misma parte literal. Ni tampoco podemos reunir $-60m^3n^3$ con $20r^2m^3$, pues sus partes literales no son idénticas.

Cociente o división de polinomios

A lo largo de los cursos anteriores hemos realizado diferentes divisiones.
Recordemos algunas por ejemplo:

Dividir 45 - 70 - 90 entre 5.
Una manera sencilla es escribir la operación en forma fraccionaria: $\dfrac{45 - 70 - 90}{5}$

Como 5 es denominador común de 45, 70 y 90, entonces podemos separar las fracciones:

Así: $\dfrac{45 - 70 - 90}{5} = \dfrac{45}{5} - \dfrac{70}{5} - \dfrac{90}{5}$

Simplificando, tenemos:

$$\frac{\overset{9}{\cancel{45}}}{\underset{1}{\cancel{5}}} - \frac{\overset{14}{\cancel{70}}}{\underset{1}{\cancel{5}}} - \frac{\overset{18}{\cancel{90}}}{\underset{1}{\cancel{5}}} = 9 - 14 - 18 = 9 - 32 = -23$$

De igual manera, procedemos en el caso de tener expresiones algebraicas, por ejemplo:

Dividir $45x^5 - 70x^3 - 90x$ entre $5x^2$

Repartiendo el denominador nos queda:

$$\frac{45x^5 - 70x^3 - 90x}{5x^2} = \frac{45x^5}{5x^2} - \frac{70x^3}{5x^2} - \frac{90x}{5x^2}$$

Simplificado cada fracción, tenemos:

$$\frac{\overset{9x^3}{\cancel{45x^5}}}{\underset{1}{\cancel{5x^2}}} - \frac{\overset{14x}{\cancel{70x^3}}}{\underset{1}{\cancel{5x^2}}} - \frac{\overset{18}{\cancel{90x}}}{\underset{1x}{\cancel{5x^2}}} = \frac{9x^3}{1} - \frac{14x}{1} - \frac{18}{x} = 9x^3 - 14x - 18x^{-1}$$

Observa que dividir entre x es multiplicar por x^{-1}

También podemos hacer la división entre polinomios, como dividimos en aritmética, así:

$$\begin{array}{ccc|l}
\cancel{45x^5} & \cancel{-70x^3} & \cancel{-90x} & 5x^2 \\ \cline{4-4}
\cancel{-45x^5} & \cancel{+70x^3} & \cancel{+90x} & 9x^3 - 14x - 18x^{-1} \\ \cline{1-3}
0 & 0 & 0 &
\end{array}$$

Productos y cocientes notables

Ahora aprenderemos a hacer reconocimiento por simple inspección de algunas expresiones algebraicas especiales que se conocen como productos notables y cocientes notables.

Las frases "producto notable" y "cociente notable", en matemáticas, se refieren al resultado de una multiplicación (producto) o de una división (cociente), que se hace con mucha frecuencia

El cuadrado del binomio

Sabemos que un binomio está compuesto por dos términos, ya sea que se sumen o que se resten.

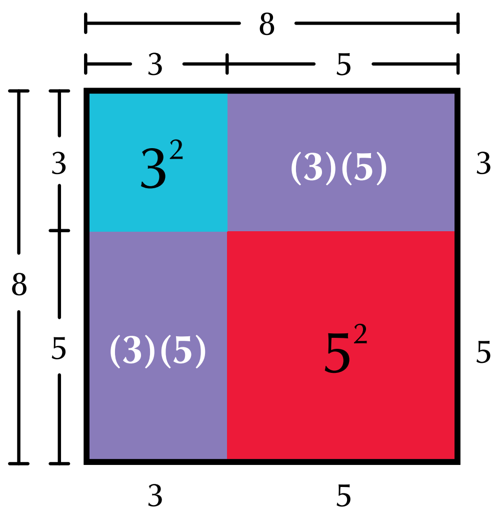
Para desarrollar el cuadrado de un binomio, estudiamos dos casos: el cuadrado de la suma de dos términos y el cuadrado de la diferencia de dos términos.

El cuadrado de la suma de dos términos

Desarrollemos el caso siguiente:

Nos piden el resultado de **$(3 + 5)^2$.**

Lo primero que se nos ocurre es decir que $(3 + 5)^2 = 8^2 = 64$, lo cual es correcto.
Ahora, grafiquemos la operación $(3 + 5)^2$.
Geométricamente $(3 + 5)^2$ es un cuadrado cuyo lado mide $(3 + 5)$ unidades.



El dibujo nos muestra que el área de ese cuadrado está formada por un cuadrado de lado 3 unidades, 2 rectángulos, cada uno de lados 3 unidades y 5 unidades, y otro cuadrado de lado 5 unidades.
Numéricamente, lo expresamos así:

$$(3 + 5)^2 = 3^2 + (3)(5) + (3)(5) + 5^2 = 3^2 + 2[(3)(5)] + 5^2$$

Comprobemos que $3^2 + 2[(3)(5)] + 5^2 = 64$,

$$3^2 + 2[(3)(5)] + 5^2 = 9 + 2[15] + 25 = 9 + 30 + 25 = 9 + 55 = 64.$$

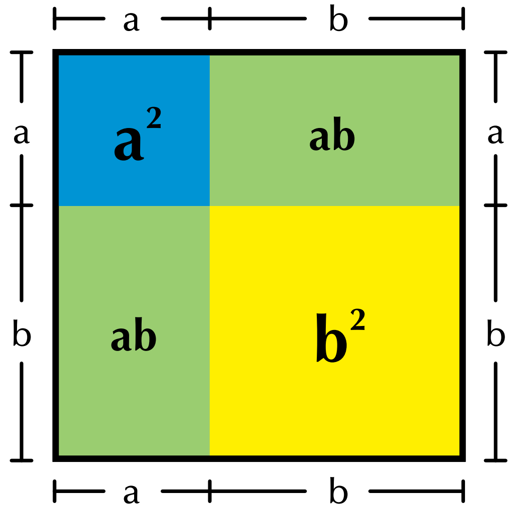
Ahora, tomemos un cuadrado cuyo lado sea la suma de dos valores cualesquiera, que no conocemos y que llamaremos a y b. Entonces, tendremos que la expresión de su área es $(a + b)^2$.

Observando su representación geométrica, vemos que el área del cuadrado de lado $(a + b)$ está formada por un cuadrado de lado a, cuya área es a^2; dos rectángulos de lados a y b cada uno, cuyas áreas son ab cada una, y un cuadrado de lado b, cuya área es b^2.

Simbólicamente escribimos:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Esta expresión se conoce con el nombre de **“trinomio cuadrado perfecto”.**



Realizando $(a + b)^2$, tendremos que $(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$.

Aplicando la ley distributiva del producto con respecto a la suma nos queda:

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$$

$$=(a+b)\ (a+b)$$

$$= \underbrace{aa}_{a^2} + \underbrace{ab + ba}_{2ab} + \underbrace{bb}_{b^2} = a^2 + 2ab + b^2$$

Recordemos que ab = ba, por la propiedad conmutativa de la multiplicación.

Otra manera de realizar $(a + b)^2$ es:

$$\begin{array}{r} a+b \\ a+b \\ \hline a^2 + ab \\ ba + b^2 \\ \hline a^2 + 2ab + b^2 \end{array}$$

Luego podemos afirmar lo siguiente:

El cuadrado de la suma de dos términos es igual al cuadrado del primer término,más dos veces el primero por el segundo, más el cuadrado del segundo.

En general: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Analicemos el ejercicio siguiente:

Resolver $(3x^2 + 5)^2$

Veamos:

$(3x^2 + 5)^2$ es de la forma

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Por lo tanto: $(3x^2 + 5)^2 = (3x^2)^2 + 2(3x^2)(5) + 5^2$.

Luego,

$(3x^2 + 5)^2 = (3x^2)^2 + 2(3x^2)(5) + 5^2 = \mathbf{9x^4 + 30x^2 + 25}$

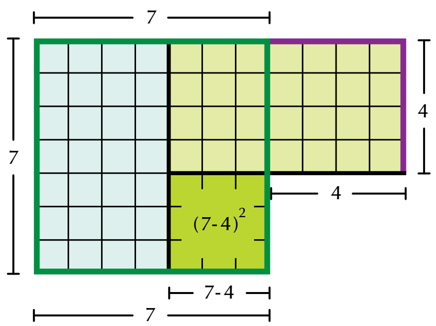
El cuadrado de la diferencia de dos términos

Resolvamos la operación $(7 - 4)^2$.

Lógicamente diremos: $(7 - 4)^2 = (3)^2 = (3)(3) = 9$, lo cual es correcto.

Ahora, grafiquemos la operación $(7 - 4)^2$.

Geométricamente $(7 - 4)^2$ es el área del cuadrado, cuyo lado mide $(7 - 4)$ unidades.



El dibujo nos muestra que:

$(7 - 4)^2 = 7^2 - (7)(4) - (7)(4) + 4^2 = 7^2 - 2[(7)(4)] + 4^2$.

Ya vimos que $(7 - 4)^2 = 9$, porque $(7 - 4)^2$ es $3^2 = 9$

Comprobemos ahora que $7^2 - 2[(7)(4)] + 4^2 = 9$.

$$\begin{aligned} 7^2 - 2[(7)(4)] + 4^2 &= 49 - 2[28] + 16 \\ &= 49 - 56 + 16 = (49 - 56) + 16 \\ &= -7 + 16 = 16 - 7 = 9. \end{aligned}$$

Generalizando, realicemos $\mathbf{(a - b)^2}$.

Sabemos que $\mathbf{(a - b)^2 = (a - b)(a - b)}$

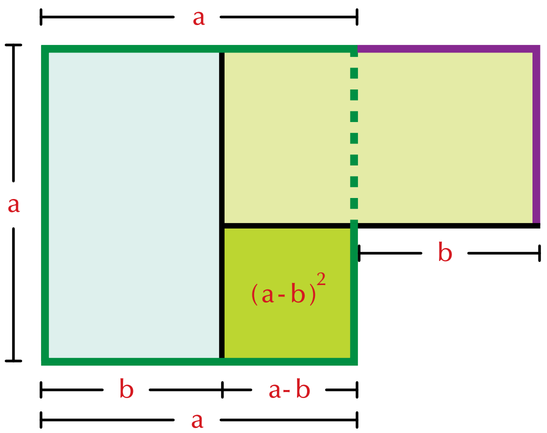
Aplicando la ley distributiva del producto con respecto a la suma nos queda:

$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b)$$

$$=(a - b)\ (a - b)$$

$$= \underbrace{aa}_{a^2} \underbrace{- ab - ba}_{-2ab} \underbrace{- b(-b)}_{+b^2} = a^2 - 2ab + b^2$$

Recordemos que ab = ba, por la propiedad conmutativa de la multiplicación.



Otra manera de resolver $(a - b)^2$ es realizando la multiplicación de manera vertical:

$$\begin{array}{r} a-b \\ a-b \\ \hline a^2 - ab \qquad \\ - ba + b^2 \\ \hline a^2 - 2ab + b^2 \end{array}$$

Luego podemos afirmar lo siguiente:

El cuadrado de la diferencia de dos términos es igual al cuadrado del primer término, menos dos veces el primero por el segundo, más el cuadrado del segundo.

En general: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Ahora analicemos el ejercicio siguiente:
Resolver $(3x^2 - 5)^2$
Veamos:
$(3x^2 - 5)^2$ es de la forma $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

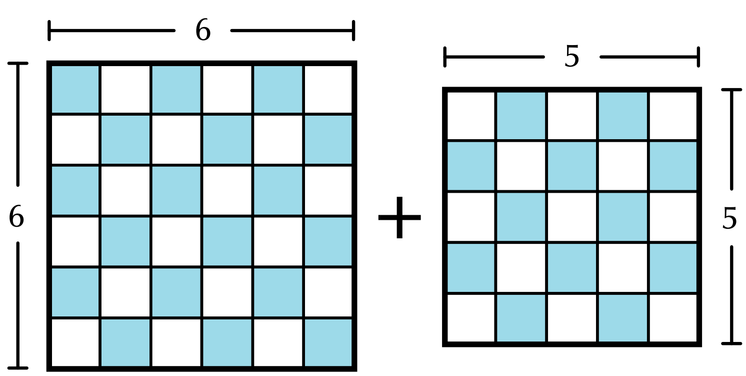
Por lo tanto: $(3x^2 - 5)^2 = (3x^2)^2 - 2(3x^2)(5) + 5^2$.

Luego, $(3x^2 - 5)^2 = (3x^2)^2 - 2(3x^2)(5) + 5^2 =$ $\mathbf{9x^4 - 30x^2 + 25}$

La suma de los cuadrados de dos términos no tiene expresión equivalente.

Analicemos el caso siguiente:
¿A qué es igual $6^2 + 5^2$?
Utilizando nuestros conocimientos aritméticos, sabemos que

$6^2 + 5^2 = (6)(6) + (5)(5) = 36 + 25 = 61$.



En general:

$$a^2 + b^2 = a^2 + b^2,$$

es decir que no tiene otra expresión equivalente.

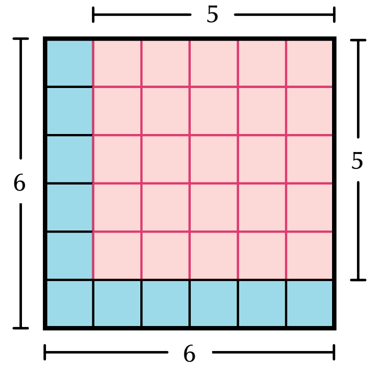
La diferencia de los cuadrados de dos términos

Analicemos el caso siguiente: ¿A qué es igual $6^2 - 5^2$?

Sabemos que

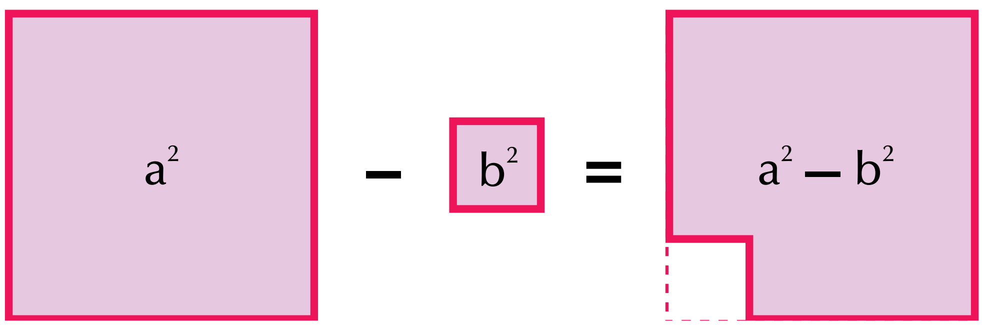
$$6^2 - 5^2 = (6)(6) - (5)(5) = 36 - 25 = 11.$$

En la gráfica podemos constatar que si a 36 unidades cuadradas les quitamos 25 unidades cuadradas nos quedan 11 unidades cuadradas (11 cuadritos azules).

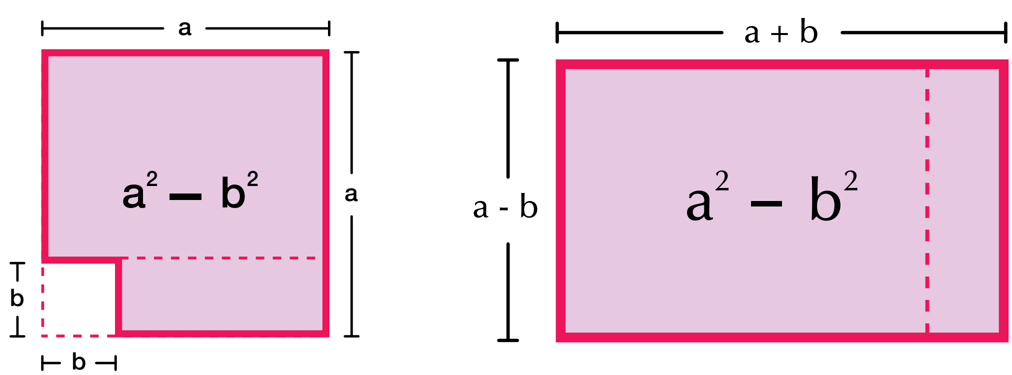


Generalizando, ya no tomemos las unidades 6 y 5, sino dos valores cualesquiera: a y b.

Gráficamente realizamos $a^2 - b^2$:



Podemos recortar y trasladar parte del área $a^2 - b^2$ y observar cómo nos queda:



Ahora, realicemos la multiplicación $(a + b)(a - b)$.

Podemos efectuar este producto de dos maneras:

Aplicando la ley distributiva tenemos:

$$(a + b)(a - b) = (a + b)(a - b) = \underbrace{aa}_{a^2} - \cancel{ab} + \cancel{ba} - \underbrace{bb}_{b^2} = a^2 - b^2$$

Otra manera de realizar $(a + b)(a - b)$ es la que sigue:

$$\begin{array}{rcl} & a + b & \\ & a - b & \\ \hline a^2 + a\cancel{b} & & \\ & -\cancel{b}a - b^2 & \\ \hline a^2 & & -b^2 \end{array}$$

Como vimos $a^2 - b^2$, geométricamente, es un cuadrado de lado **a** menos otro cuadrado de lado **b**.

En general, $a^2 - b^2 = (a + b)\ (a - b)$.

Los binomios $(a + b)$ y $(a - b)$ se llaman binomios conjugados.

Los **binomios conjugados** tienen un término común que se identifica por llevar el mismo signo, mientras que los otros términos que llevan signos contrarios se les conoce como **términos simétricos**.

Términos comunes

$(a + b)\quad(a - b)$

Términos simétricos

La diferencia de cuadrados también se puede expresar de la siguiente manera:

El producto de dos binomios conjugados es igual al cuadrado del término común, menos el cuadrado del término simétrico.

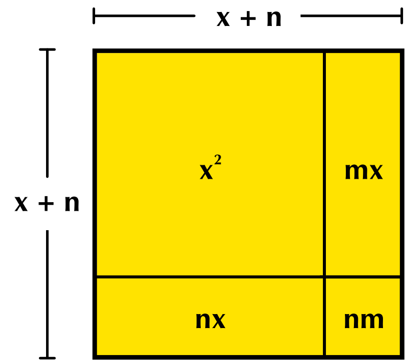
O también podemos expresarlo como sigue:

La diferencia de los cuadrados de dos términos es igual a la suma de los términos por su diferencia:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b).$$

Producto de dos binomios con término común

Los binomios de la forma **$(x + m)\ (x + n)$**, en donde **x** es el término común y **m** y **n** son los términos no comunes, se les conocen con el nombre de producto de binomios con un término común:



Geométricamente representemos $(x + m)\ (x + n)$.

La gráfica nos muestra que el área de la figura es $(x + m)(x + n)$ y corresponde a la suma de las áreas dentro de él.

Es decir, **$(x + m)\ (x + n) = x^2 + mx + nx + mn$**.

Aplicando la ley asociativa de la suma, en los términos que tienen x, nos queda:

$(x + m)\ (x + n) = x^2 + (mx + nx) + mn$,
de donde se obtiene:
$(x + m)\ (x + n) = x^2 + x\ (m + n) + mn$.

Término común

$(x + m)\quad(x + n)$

Términos no comunes

En palabras diremos que el producto de dos binomios con un término en común es igual al término común al cuadrado más el producto del término común por la suma de los términos no comunes, más el producto de los términos no comunes.

Esto es: $(x + m)\ (x + n) = x^2 + (m\,x + nx) + mn$.

Cubo de un binomio

La suma o la diferencia de dos términos, elevada al cubo, se conoce como el cubo de un binomio.

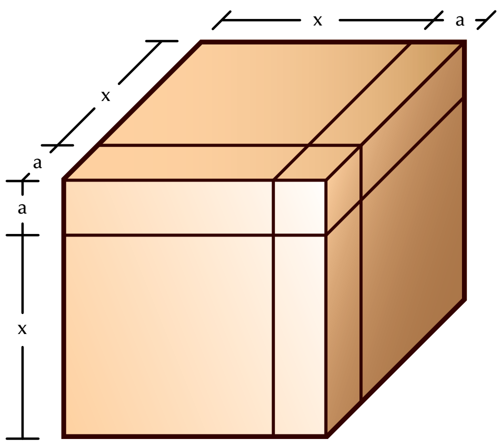
Si los términos son x y a, se escriben **$(x + a)^3$ y $(x - a)^3$**

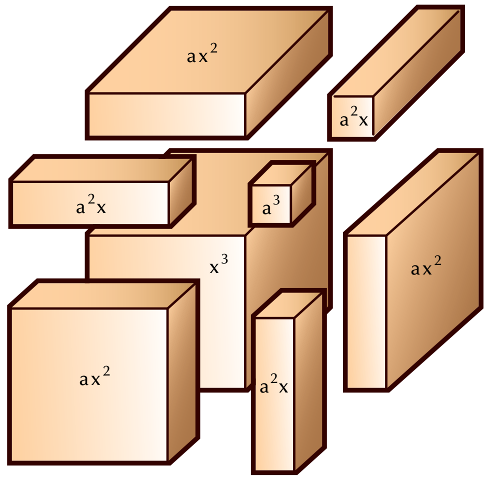
Expliquemos el cubo de una suma.

La representación geométrica de $(x + a)^3$ es, por ejemplo, una caja cúbica de lado $(x + a)$.

Observemos las cajitas que forman la caja cúbica de arista o lado $(x + a)$ y cuyo volumen es $(x + a)^3$.

Ellas son: 1 caja cúbica de lado a, 1 caja cúbica de lado b y 3 cajitas de volumen ax^2:





Veamos cuál es el resultado de $(x + a)^3$.

$(x + a)^3 = (x + a)(x + a)(x + a) = [(x + a)\ (x + a)](x + a) = (x + a)^2(x + a)$.

Sabemos que $(x + a)^2 = x^2 + 2xa + a^2$, entonces $(x + a)^3 = (x^2 + 2xa + a^2)(x + a)$.

Resolviendo esas multiplicaciones tenemos:

$$\begin{array}{r}
x^2 + 2xa + a^2 \\
x + a \\
\hline
x^3 + 2x^2a + xa^2 \\
+\ x^2a + 2xa^2 + a^3 \\
\hline
x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + a^3
\end{array}$$

Observa que, en este caso, la suma de los exponentes de cada término es 3.

En general:

El cubo de la suma de dos términos o cubo de la suma de un binomio es igual al cubo del primer término, más 3 veces el cuadrado del primero por el segundo, más 3 veces el primero por el cuadrado del segundo, más el cubo del segundo.

Simbólicamente: $(x + a)^3 = x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + a^3$.

Siguiendo el proceso anterior, verifica que **$(x - a)^3 = x^3 - 3x^2a + 3xa^2 - a^3$**

La suma de los cubos de dos términos: $a^3 + b^3$

Dados dos términos a y b, obtenemos la suma de sus cubos multiplicando **$(a + b)(a^2 - ab + b^2)$**

Comprobémoslo:

$$\begin{array}{r}
a^2 - ab + b^2 \qquad \\
a + b \qquad \\
\hline
a^3 - \cancel{a^2b} + \cancel{ab^2} \qquad \\
+ \cancel{ba^2} - \cancel{ab^2} + b^3 \\
\hline
a^3 \qquad\qquad\qquad\quad + b^3
\end{array}$$

Concluimos que **$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$**

La diferencia de los cubos de dos términos

Dados dos términos a y b, obtenemos la diferencia de sus cubos multiplicando **$(a - b)(a^2 + ab + b^2)$**

Comprobémoslo:

$$\begin{array}{r}
a^2 + ab + b^2 \qquad \\
a - b \qquad \\
\hline
a^3 + \cancel{a^2b} + \cancel{ab^2} \qquad \\
- \cancel{ba^2} - \cancel{ab^2} - b^3 \\
\hline
a^3 \qquad\qquad\qquad\quad - b^3
\end{array}$$

Concluimos que **$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$**

Cocientes notables

Los cocientes notables son aquellas divisiones que sin efectuar la operación, se pueden escribir por simple inspección. Los cocientes notables son cocientes exactos.

Sabemos que la división es la operación inversa de la multiplicación.

Con base en los productos notables acabados de estudiar podemos deducir los cocientes notables.

Recordemos que:

1. **$(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$**

Como **$(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$**, entonces dividiendo entre **$(a + b)$** ambos lados de la igualdad, tenemos:

$$\frac{(a+b)^2}{(a+b)} = \frac{\cancel{(a+b)}(a+b)}{\cancel{(a+b)}}$$, Luego, $$\boxed{\frac{(a+b)^2}{(a+b)} = (a+b)}$$

2. Como $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$, entonces si dividimos entre $(a + b)$ ambos lados de la igualdad, tenemos:

$$\frac{a^2 - b^2}{(a + b)} = \frac{\cancel{(a + b)}(a - b)}{\cancel{(a + b)}}$$, Luego, $$\boxed{\frac{a^2 + b^2}{(a + b)} = (a - b)}$$

Del mismo modo podemos dividir ambos lados de la igualdad

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$, entre $(a - b)$ y tenemos:

$$\frac{a^2 - b^2}{(a - b)} = \frac{(a + b)\cancel{(a - b)}}{\cancel{(a - b)}}$$, Luego, $$\boxed{\frac{a^2 - b^2}{(a - b)} = (a + b)}$$

3. Sabemos que $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$.

Dividiendo ambos miembros de la igualdad entre a - b, obtenemos:

$$\frac{\cancel{(a - b)}(a^2 + ab + b^2)}{\cancel{(a - b)}} = \frac{a^3 - b^3}{a - b}$$, Luego, $$\boxed{a^2 + ab + b^2 = \frac{a^3 - b^3}{a - b}}$$

O lo que es igual $$\boxed{\frac{a^3 - b^3}{a - b} = a^2 + ab + b^2}$$

4. Sabemos que $(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$.

Dividiendo ambos miembros de la igualdad entre a + b, obtenemos:

$$\frac{\cancel{(a + b)}(a^2 - ab + b^2)}{\cancel{(a + b)}} = \frac{a^3 + b^3}{a + b}$$, Luego, $$\boxed{a^2 - ab + b^2 = \frac{a^3 + b^3}{a + b}}$$

O lo que es igual $$\boxed{\frac{a^3 + b^3}{a + b} = a^2 - ab + b^2}$$

Aplicación

Copia los ejercicios en tu cuaderno, soluciónalos y después compara y comenta las soluciones.

1. Completa la tabla

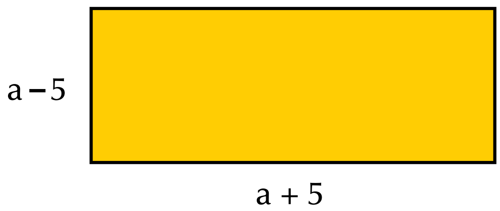
Polinomio	Grado Mayor exponente	Número de términos	Coeficiente(s)	Parte literal	Término independiente
$2xy^3 - 5x^2 + y^4$	**4**	**3**	**2, -5, 1**	**x, y**	**0**
$m - n + 4$					
$-8k^3 + t^2 - i + 2$					
$7h^4g^1 + 5f^2 - 6x + 5$					
$\frac{1}{8}j^6 - \frac{3}{2}$					
$-\frac{1}{2}a + b^2$					

2. Dados los binomios A = (x + 4) y B = (x - 3), realizar:

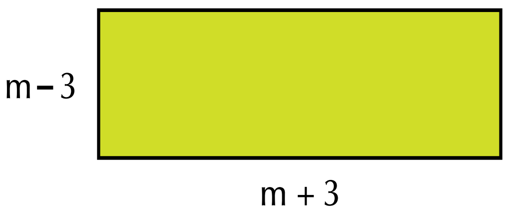
   a. AB b. A - B c. A + B d. A^2 e. B^3

   Encuentra el área de cada rectángulo.

3.



4.



   Resuelve y simplifica:

5. $(x - 1)(x - 2) + (x + 3)(x - 5) =$

6. $(7a + 3b)(7a - 8b) + (a - b)(a - 4b) =$

   Completa las expresiones que hagan cierta la igualdad:

7. (x-   ) (x +   ) = x2-4x -21

8. (3a -   ) (- 2) = $9a^2 - 10a + 16$

9. (2y3 + 3x) (-   ) = 4y6 + 2xy3 - 6x2

10. Dados $x = \frac{2}{3}$ y $y = \frac{-1}{2}$, calcula el valor numérico de las expresiones:

    a. $9x^2 - 12y^3 - 6xy - 6x + 1$
    b. $x^3 - 5x^2y - 3xy^2 - 6y^3$

Entendemos por…

Incógnita el número desconocido en una expresión algebraica, que puede llegar a conocerse según las condiciones dadas. Por ejemplo:
¿Cuál es el número que disminuido en 18 da 25?
A ese número desconocido lo llamaremos incógnita x y plantearemos la expresión: x - 18 = 25.
Al solucionar, veremos que el valor de la incógnita x es 43, porque 43 -18 =25.

$$x - 18 = 25$$
$$x = 25 + 18$$

Diversión matemática

Juego de letras

A cada una de las letras de la palabra “maestro” le corresponde un número entre el 1 y el 7. Diviértete encontrando el valor asignado a cada una, según las pistas dadas.

Tomado de http://retomania.blogspot.com/2011/06/retos-con-amor.html

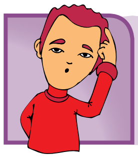
Día a día

Inventos de ayer, avances de hoy

La vida y obra de Blas o Blaise Pascal es ejemplo de inteligencia, disciplina y progreso. Él nació en Francia, el 19 de junio de 1623. Vivió solo 39 años, pero dejó grandes descubrimientos e inventos en tan corto tiempo. Sus grandes aportes fueron hechos en matemáticas, física, filosofía y literatura francesa.
Entre sus contribuciones sobresalen el diseño y la construcción de la primera calculadora, llamada Pascalina, y otras calculadoras mecánicas. Además, los aportes como la teoría de las probabilidades, en geometría el teorema de Pascal y en física investigaciones sobre los líquidos y los gases.
La contribución de Pascal a la ciencia y la tecnología, así como los aportes de muchos otros antepasados, han permitido los grandes avances que tenemos hoy día.

Tomado de http://noticias.universia.es/vida-universitaria/noticia/2008/06/19/579985/19-junio-1623-nacio-blaise-pascal-matematico-fisico-filosofo-religioso-frances.html

Tema 2. Factorización de polinomios



Indagación

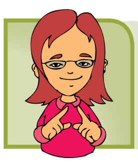
Vamos a recordar la propiedad distributiva del producto con respecto a la suma.

Por ejemplo, si queremos resolver $5b^2(b + 1)$, observamos que es una expresión algebraica compuesta por dos factores, es decir, dos expresiones que se multiplican: un monomio y un binomio. Entonces, aplicamos la propiedad distributiva del producto con respecto a la suma, multiplicando $5b^2(b) + 5b^2(1)$, y nos queda:

$$5b^2(b + 1) = (5b^2)(b) + (5b^2)(1) = 5b^3 + 5b^2.$$

¿Cómo escribirías la expresión algebraica $5b^3 + 5b^2$ si te la pidieran en forma de factores?

Intenta hacer una propuesta de solución y coméntala con tus compañeros.



Conceptualización

Revisemos el siguiente resumen de productos y cocientes notables

Productos notables
Cuadrado del binomio $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
Cubo del binomio $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
Diferencia de cuadrados $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
Diferencia de cubos $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
Suma de cubos $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

Cocientes Notables
$\dfrac{(a + b)^2}{(a + b)} = (a + b)$
$\dfrac{a^2 - b^2}{(a - b)} = (a + b)$ $\quad$ $\dfrac{a^2 - b^2}{(a + b)} = (a - b)$
$a^2 + ab + b^2 = \dfrac{a^3 - b^3}{a - b}$
$\dfrac{a^3 - b^3}{a - b} = a^2 + ab + b^2$
$a^2 - ab + b^2 = \dfrac{a^3 + b^3}{a + b}$

Factorizar significa expresar en factores, es decir, expresar en términos o valores que se multipliquen.

El proceso que consiste en encontrar varios números cuyo producto sea igual a un número dado se conoce con el nombre de factorización.

Por ejemplo:

3 y 5 son factores de 15, porque (3)(5) = 15.

2 y a son factores de 2a, porque (2)(a) = 2a.

Los factores de $45x^2y^3$ son 45, x^2 y y^3, porque $(45)(x^2)(y^3) = 45x^2y^3$.

También $9x^2$ y $5y^3$ son factores de $45x^2y^3$, porque $(9x^2)(5y^3) = 45x^2y^3$

Pero $45x^2y^3$ pueden tener otros factores (expresiones o términos que multiplicados den la expresión dada).

En tu cuaderno, completa los factores:

$15\boxed{}$ **y** $\boxed{}y^3$ son los factores de $45x^2y^3$, porque ( )( ) = $45x^2y^3$.

$5x\boxed{}$, $3y\boxed{}$ **y** $\boxed{}y$ son los factores de $45x^2y^3$, porque ( )( )( )= $45x^2y^3$.

Y así, podríamos seguir buscando más expresiones que multiplicadas nos dieran $45x^2y^3$. Encuentra otras, y compártalas con algunos de tus compañeros.

Extracción del factor común

Dada una expresión algebraica, observamos las letras que se repiten en sus términos, si las hay. Y también revisamos si en sus coeficientes hay un máximo común divisor (MCD).

Por ejemplo, en la expresión $6x^3 + 3x^2 + 9x$, la x se repite en cada término y 3 es el MCD de 6, 3 y 9, entonces 3x es el mayor factor común o máximo factor común.

Ejemplo:

Factorizar $6a^4 + 36a^3 + 60a^2$, encontrando el máximo factor común.
Máximo factor común de $6a^4 + 36a^3 + 60a^2$ es $6a^2$.
Por lo tanto, $6a^2$ (¿? + ¿? + ¿?) = $6a^4 + 36a^3 + 60a^2$.

Nos preguntamos: ¿cuál valor por $6a^2$ da $6a^4$? Respondemos: a^2.
¿Cuál valor por $6a^2$ da $36a^3$? Respondemos: 6a.
¿Cuál valor por $6a^2$ da $60a^2$? Respondemos: 10.

Luego, $6a^4 + 36a^3 + 60a^2 = 6a^2(a^2 + 6a + 10)$.

Factorización de trinomios

Hemos estudiado los procesos para encontrar el producto de dos polinomios, ahora analizaremos el problema inverso: conocido el polinomio, encontremos sus factores.

Si $\mathbf{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$, entonces $\mathbf{a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2}$, por la propiedad simétrica de la igualdad.

El trinomio $a^2 + 2ab + b^2$, expresado en factores equivale al producto $(a + b)(a + b)$ que es igual a$(a + b)^2$.

Ejemplo: Expresemos en factores el trinomio $9x^2 + 12xy + 4y^2$.

Solución

Buscamos la raíz cuadrada de los extremos del trinomio $9x^2 + 12xy + 4y^2$

Raíz cuadrada de los extremos del trinomio $\longrightarrow$ $(3x)$ $(2y)$

Verificamos que el término del centro es 2 por la raíz del primero por la raíz del segundo: $2(3x)(2y) = 12xy$.

Luego, el trinomio $9x^2 + 12xy +4y^2$, factorizado, es $(3x + 2y)^2$ y se escribe: $9x^2 + 12xy + 4y^2 = (3x + 2y)^2$.

Igual procedemos con el trinomio de la forma $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, teniendo cuidado con los signos.

Veamos otro ejemplo: Factorizar el trinomio $4x^2 - 12xy + 9y^2$.

Buscamos la raíz cuadrada de los extremos del trinomio $4x^2 - 12xy +9y^2$

Raíz cuadrada de los extremos del trinomio $\longrightarrow$ $(2x)$ $(3y)$

Verificamos que el término del centro es -2 por la raíz del primero por la raíz del segundo:

$$-2(2x)(3y) = -12xy.$$

Luego el trinomio $4x^2 - 12xy + 9y^2$ factorizado es $(2x - 3y)^2$ y se escribe: $4x^2 - 12xy + 9y^2 = (2x - 3y)^2$.

Factorización de una diferencia de cuadrados

Recordemos que el producto de la forma $(a + b)(a - b)$ se conoce con el nombre producto de binomios conjugados y su resultado es una diferencia de cuadrados:

$$\mathbf{(a + b)(a - b) = a^2 - b^2.}$$

Por la propiedad simétrica de la igualdad, la expresión $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ es equivalente a la expresión $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$, de donde se deduce que la factorización de una diferencia de cuadrados es el producto de binomios conjugados.

Ejemplo:

Factorizar $x^2 - 9$.

Buscamos la raíz cuadrada de cada término de $x^2 - 9$

$$\begin{array}{ccc} x^2 & - & 9 \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ x & & 3 \end{array}$$

Raíces cuadradas $\longrightarrow$ $x \quad 3$

Como $x^2 - 9$ es de la forma **$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$,** entonces,

$x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$.

Factorización de trinomios de la forma $x^2 + (a + b)x + ab$

Encontrar dos números que multiplicados den una cantidad x y sumados otra cantidad y es un cálculo especial; una forma de resolverlo es realizando ensayos. Realiza esta actividad en grupo, y verás que te será de mucha utilidad para esta sesión.

Recordemos ahora que todo producto de binomios de la forma $(x + a)(x + b)$, con $a \neq b$, recibe el nombre de producto de binomios con un término común, donde x es llamado término común y a y b, términos diferentes.

Términos Diferentes

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

Término Común

Su resultado corresponde al cuadrado del término común, más o menos la suma algebraica de los términos diferentes multiplicada por el término común, más o menos el producto algebraico de los términos diferentes.

Ejemplo:

a. Factorizar $x^2 + 6x + 8$

La raíz cuadrada del término x^2 es $\sqrt{x^2} = x$

El término numérico o independiente es 8.

Los factores de 8 son 2 y 4, cuya suma da el coeficiente del término de primer grado (x).

Entonces, la factorización queda así:

$$\sqrt{x^2} = x$$

$$x^2 + 6x + 8 = (x + 2)\ (x + 4)$$

$$8 = (2)(4)$$

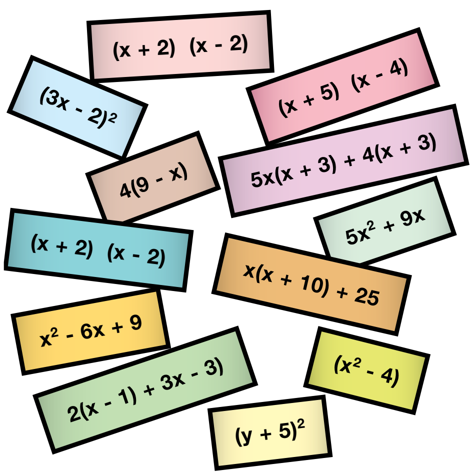
$$6 = 2 + 4$$

Luego, la factorización pedida es

$$x^2 + 6x + 8 = (x + 2)(x + 4).$$

Aplicación

1. Clasifica, en dos columnas, las siguientes expresiones dependiendo de que si están o no factorizadas:



Expresión factorizada	Expresión no factorizada

2. Busca en la columna de la derecha expresión factorizada que le corresponde a cada una de las expresiones de la izquierda:
   Completa en tu cuaderno, los términos que faltan.

Expresiones para factorizar	**Factorizaciones**
$3x(x + 5) - 4(x + 5)$	$(y + 12)(y - 12)$
$y^2 - 144$	$(x - 4)^2$
$(x + 1)(x - 1) + (2x - 2)$	$(3x - 4)(x + 5)$
$(x - 3)^2 - 2(x - 3) + 1$	$(x + 2)^2$
$9x + 30x + 25$	$(x - 1)(x + 3)$
$x(x + 4) + 4$	

3.
   a. $64 + 48x + 9x^2 = (\_\_ + \_\_)^2$

   b. $x^2 - \_\_ = (\_\_ + 7)(\_\_ - \_\_)$

   c. $(3x + \_\_)^2 = \_\_ + \_\_ + 25$

4.
   a. $(3x + \_\_)^2 = \_\_ + 24x + \_\_$

   b. $(0.7 - x)(\_\_ + x) = 0.49 - \_\_$

5.

Polinomio	Máximo factor común	Factorización
$4a^2 + 12$		
$15x^4 + 15x^3$		
$b^5 + b^4 + b^3$		
$22a\,b - 55a\,b$		
$35x^2\,y + 28x\,y^3 + 21x^4\,y^3$		

Trabaja el término conveniente para obtener trinomios cuadrados perfectos:

6.

a. $4 + 20x$

b. $- 60 xy^2 + 9x^2$

7.

a. $\frac{1}{4}x^2 + 1$ ...

b. $0.25^2 \quad 7ab$

Individualmente, factoriza los siguientes trinomios cuadrados perfectos. Si lo deseas, usa tu calculadora:

8.

a. $\frac{4}{9}a^2 + \frac{4}{12}ab + \frac{1}{16}b^2 =$

b. $81m^4 - 54m^2 n^2 + 9n^4 =$

9.

a. $36a^2b^2 + 24abc + 4c^2 =$

b. $\frac{1}{4}x^6 - \frac{4}{10}x^3y^2 + \frac{4}{25}y^4 =$

10.

a. $49y^2 - 36 =$

b. $\frac{9}{16}a^2 - b^2 =$

Entendemos por...

Factores todos aquellos números que se multiplican para obtener otro número: por ejemplo: 3 y 4 son factores de 12, porque
3 x 4 = 12, pero también 2 x 6 = 12, 1 x 12 = 12.
Por tanto, todos los posibles factores de 12 son 1, 2, 3, 4, 6 y 12.
Los factores de un número se llaman también submúltiplos de él.

Diversión matemática

Curiosa propiedad del triángulo de Pascal

Diviértete comprobando este juego de la propiedad del triángulo de Pascal.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1

Si completas las 20 primeras filas del triángulo de Pascal y coloreas las casillas usando distintos colores para los números pares e impares, observarás una estructura regular que recuerda el famoso fractal del triángulo de Sierpinski; aquel fractal que conociste en cursos anteriores.

Si aumentas paulatinamente el número de filas conservando el tamaño externo del triángulo de Pascal, el parecido se hace más patente y podrás convencerte de que los sucesivos triángulos de Pascal coloreados y con un número de filas cada vez mayor se aproximan (convergen) más al triángulo de Sierpinski.

Tomado de http://www.iesmarquesdesantillana.org/departamentos/matem/tripasca.htm

Día a día

Las cajas registradoras computarizadas

Los negocios van desde una pequeña tienda de abarrotes hasta las grandes cadenas de supermercados. Hoy en día, existen cajas registradoras que se conectan a una computadora y envían la información electrónicamente.

Las necesidades de mayor y mejor información crecieron con el tiempo y entonces surgieron los programas o software para computadora.

Además, los lectores de código de barras hacen que la operación sea más rápida y sin errores.

También existen las terminales portátiles con lector integrado de código de barras, que han hecho que el levantamiento de inventarios se pueda hacer más frecuentemente, de manera totalmente automática y en una fracción de tiempo muchísimo menor y con una exactitud casi perfecta, que la que representa hacer un inventario a mano.

Los componentes necesarios son computadora, impresora de tickets, gaveta de dinero, display o visor, impresora de ticket o tiquetera, lector de código de barras, terminal portátil de captura, báscula o balanza.

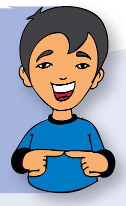
Tomado de: http://sistemasypuntodeventa.blogspot.com/2011/08/caja-registradora-y-punto-de-venta.html

Este capítulo fue clave porque

Al estudiarlo aprendí:

- A encontrar el valor numérico de una expresión algebraica.
- La importancia de la ley distributiva del producto con respecto a la adición o suma y su proceso contrario.
- A factorizar un polinomio.
- A plantear problemas que requieren la solución de un polinomio.
- A reconocer un polinomio factorizado.

Conectémonos con La Educación



La educación secundaria a distancia en las zonas rurales en Latinoamérica

"Educación a Distancia" es el término usado para la instrucción que se suministra mediante tecnologías tales como la radio, la televisión, la computadora y la Internet, con el apoyo de material impreso.

El aprendiz se encuentra a distancia del profesor durante el proceso de enseñanza-aprendizaje.

El propósito es dar la oportunidad a todos aquellos que desean estudiar, cubriendo todo el país, aun en lugares remotos. Por tanto, los gobiernos de los países en vías de desarrollo han venido implementado estrategias para introducir la educación a distancia y promover la educación en áreas rurales.

En el caso de Latinoamérica, donde un gran número de personas vive en lugares aislados en áreas rurales pobres, los proyectos de educación se han introducido para dar oportunidad a todos los niños rurales, a fin de que puedan completar sus estudios. Los proyectos son administrados por los gobiernos de cada país y se les denomina Telesecundaria o Educación a Distancia Rural. No obstante, estos proyectos necesitan del apoyo de organizaciones internacionales, debido a las grandes inversiones que se deben realizar. Por ejemplo, cada vez es mayor el número países que solicitan ayuda financiera al Banco Mundial para la tecnología de las telecomunicaciones de los proyectos; entidad que manifiesta que este movimiento se irá incrementando rápidamente en los próximos cinco a diez años.

Existen bastantes proyectos de educación a distancia en América Latina, incluso dirigidos también a los adultos.

Tomado de: http://www.uned.es/catedraunesco-ead/publicued/pbc01/secundaria.htm

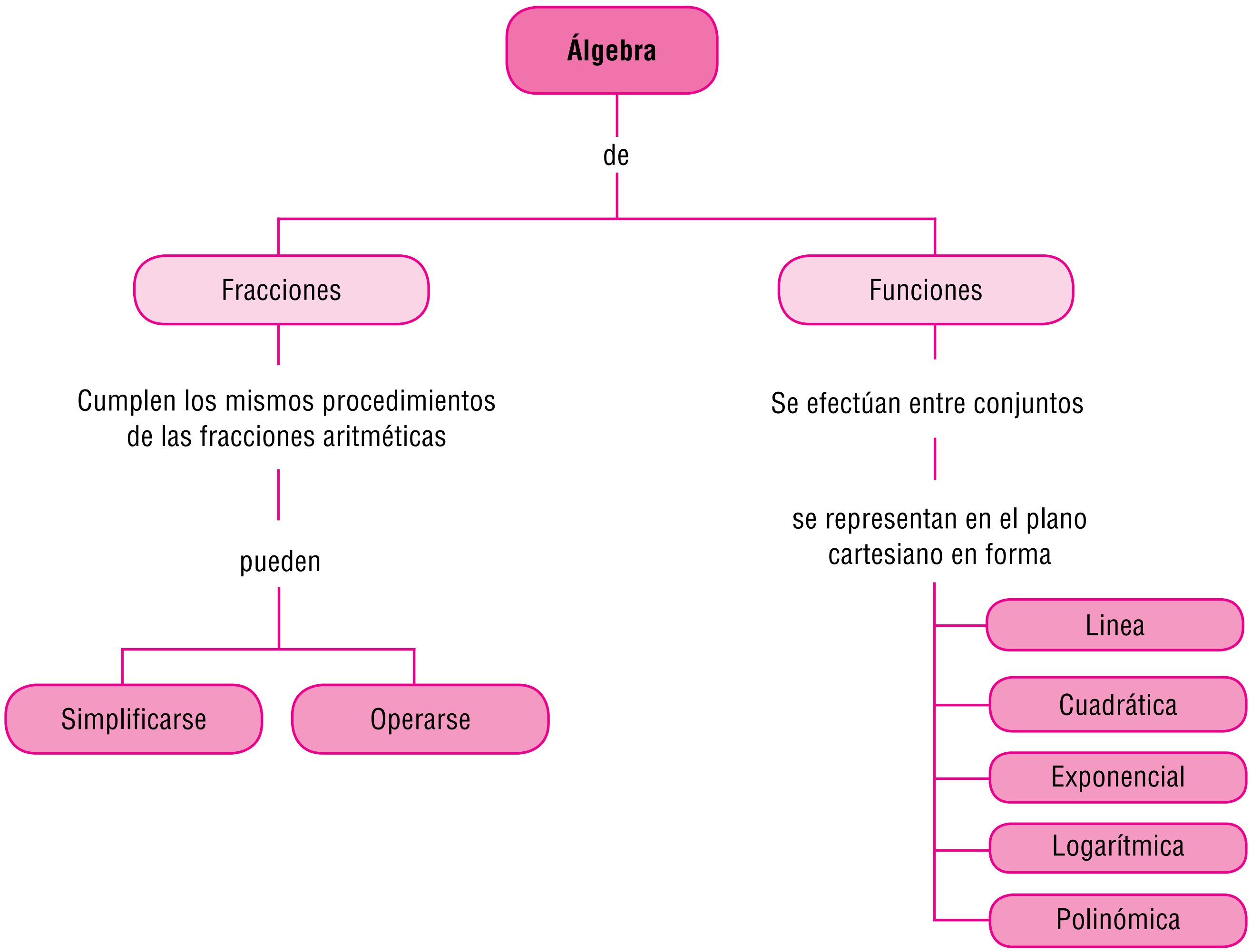
Fracciones algebraicas y funciones

En este capítulo estudiaremos las fracciones algebraicas y las gráficas de las funciones.

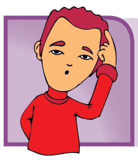
Las fracciones algebraicas son las expresiones que se pueden escribir como el cociente de dos polinomios. También suelen llamarse expresiones racionales.

El trabajo con fracciones algebraicas te resultará familiar, puesto que has trabajado con números fraccionarios y además con expresiones algebraicas.

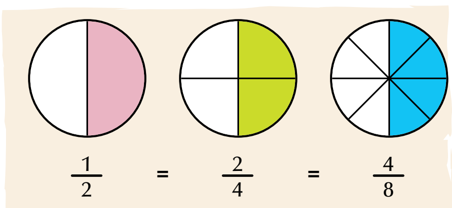
Las funciones son representaciones matemáticas muy potentes, para expresar fenómenos de cambio o variación. Estudiaremos, entonces, diferentes tipos de funciones como son las lineales, las cuadráticas, las exponenciales y las polinómicas.



Tema 1.
Fracciones algebraicas, equivalencia y simplificación



Indagación



Recordemos las clases de equivalencia de un número racional, que estudiamos en los cursos anteriores.

Por ejemplo, $\frac{1}{9}, \frac{2}{18}, \frac{3}{27}, \frac{4}{36} \ldots$ es la clase de

equivalencia de $\frac{1}{9}$, porque:

$\frac{1}{9} = \frac{2}{18} = \frac{3}{27} = \frac{4}{36} = \ldots$, es decir, las fracciones

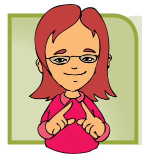
$\frac{1}{9}, \frac{2}{18}, \frac{3}{27}, \frac{4}{36} \quad \ldots$

son equivalentes.

En tu cuaderno, escribe algunas fracciones

equivalentes a $\frac{3}{5}$

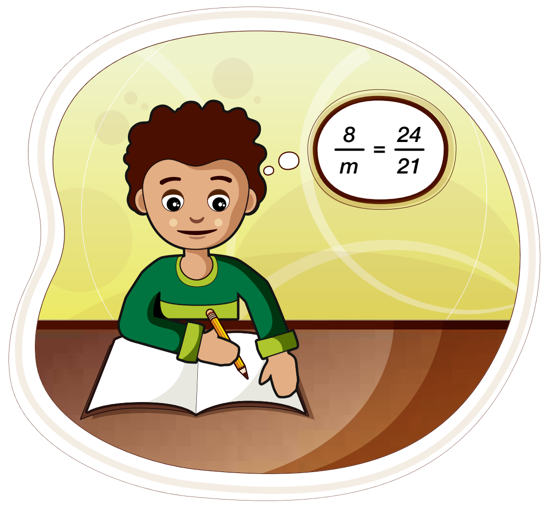
Ahora, juega con otro compañero así: tú le dirás una fracción que puede ser positiva o negativa y tu compañero escribirá 5 fracciones equivalentes a esa fracción. Después, tu compañero dirá una fracción (positiva o negativa) y tú darás 5 fracciones equivalentes a ella. Podrán realizar el proceso varias veces, y ganará quien lo haga correctamente en el menor tiempo posible.



Conceptualización

Félix se encuentra buscando solución a algunas situaciones:

1. Si la fracción $\frac{8}{m}$ es equivalente a la fracción $\frac{24}{21}$, ¿cuál es el valor de m?



Félix está seguro de que la solución consiste en igualar las razones y aplicar la ley fundamental de las proporciones.

Por tanto, dice: $\frac{8}{m} = \frac{24}{21}$ y aplicando la ley fundamental de las proporciones tengo:

$$\frac{8}{m} = \frac{24}{21}$$

Producto de medios = producto de extremos, luego puedo decir que 24m =8(21).

Resolviendo, me queda

$$m = \frac{\overset{1}{\cancel{8}}(21)}{\underset{3}{\cancel{24}}} = \frac{\overset{7}{\cancel{21}}}{\underset{1}{\cancel{3}}} = 7$$

Félix encontró que ***m* = *7*** y decide comprobarlo:

Si $\frac{8}{m}$ es equivalente $\frac{24}{21}$, significa que $\frac{8}{m} = \frac{24}{21}$ y como ***m* = *7***, entonces quedaría $\frac{8}{7} = \frac{24}{21}$.

Lo cual es cierto si amplifico por 3 a $\frac{8}{7}$ o si simplifico por 3 a $\frac{24}{21}$ o si multiplico medios y extremos.

2. Ahora, busquemos fracciones equivalentes a $\frac{7a^3b}{2b^2a}$

Sabemos que las fracciones equivalentes se forman por amplificación o por simplificación.

Entonces, fracciones equivalentes a $\frac{7a^3b}{2b^2a}$ por **amplificación** sería por ejemplo:

$$\frac{7a^3b}{2b^2a} = \frac{7a^3b \cdot 2}{2b^2a \cdot 2} = \frac{14a^3b}{4b^2a} \;;$$

$$\frac{7a^3b}{2b^2a} = \frac{7a^3b \cdot 5}{2b^2a \cdot 5} = \frac{35a^3b}{10b^2a} \;;$$

$$\frac{7a^3b}{2b^2a} = \frac{7a^3b \cdot 9}{2b^2a \cdot 9} = \frac{63a^3b}{18b^2a}.$$

Por tanto, obtenemos que $\frac{7a^3b}{2b^2a} = \frac{14a^3b}{4b^2a} = \frac{35a^3b}{10b^2a} = \frac{63a^3b}{18b^2a}$

Fracciones equivalentes a $\frac{7a^3b}{2b^2a}$ por **simplificación** sería:

Dividiendo numerador y denominador entre **a** tenemos:

$$\frac{7\overset{a^2}{\cancel{a^3}}b}{2b^2\underset{1}{\cancel{a}}} = \frac{7a^2b}{2b^2}$$, entonces es $\frac{7a^3b}{2b^2a}$ equivalente a $\frac{7a^2b}{2b^2}$

o también decimos: $\frac{7a^3b}{2b^2a} = \frac{7a^2b}{2b^2}$

Y dividiendo numerador y denominador entre ***b***, tenemos:

$$\frac{7a^2\overset{1}{\cancel{b}}}{2\underset{b}{\cancel{b^2}}} = \frac{7a^2}{2b}$$ Luego, $\frac{7a^2b}{2b^2}$ es equivalente a $\frac{7a^2}{2b}$ o también decimos: $\frac{7a^3b}{2b^2a} = \frac{7a^2}{2b}$

Por tanto, si $\frac{7a^3b}{2b^2a}$ es equivalente a $\frac{7a^2b}{2b^2}$ y $\frac{7a^2b}{2b^2}$ es equivalente a $\frac{7a^2}{2b}$, entonces por transitividad $\frac{7a^3b}{2b^2a}$ es equivalente a $\frac{7a^2}{2b}$. Luego, la fracción $\frac{7a^3b}{2b^2a}$, simplificada en su mínima expresión, es $\frac{7a^2}{2b}$

Es decir que $\frac{7a^3b}{2b^2a} = \frac{7a^2}{2b}$

En este capítulo, nos interesa especialmente la simplificación de fracciones.

3. Nos piden simplificar a su mínima expresión la fracción algebraica $\frac{4a^2}{8a}$ Analicémosla.

Solución

$$\frac{4a^2}{8a} = \frac{4aa}{(2)(4)a}$$

Simplificando nos queda:

$$\frac{4a^2}{8a} = \frac{\cancel{4}\cancel{a}a}{(2)(\cancel{4})\cancel{a}} = \frac{a}{2} = \frac{1}{2}a$$

Concluimos que:

- La simplificación de fracciones algebraicas se realiza aplicando, correctamente, las leyes de los exponentes y las propiedades de las operaciones con números fraccionarios.
- En todos los casos, se considera que la expresión que figura como divisor representa un número distinto de cero.
- Simplificar una fracción común es transformarla en otra equivalente que tenga sus términos más sencillos.
- La simplificación de una fracción común es posible si su numerador y denominador son divisibles entre un mismo número.

Las fracciones algebraicas son las expresiones que se pueden escribir como el cociente de dos polinomios.
También suelen llamarse expresiones racionales.

Operaciones entre fracciones algebraicas

Las operaciones que se realizan entre fracciones algebraicas tienen el mismo tratamiento que las que se realizan entre números fraccionarios o racionales.

Adición de fracciones algebraicas

Recordemos la suma de fracciones que aprendimos en los cursos anteriores. ¿Cómo sumamos fracciones de diferente denominador?

Por ejemplo, para realizar $\frac{7}{6}+\frac{8}{15}$,convertimos las fracciones dadas en fracciones equivalentes con igual denominador, buscando el mínimo común múltiplo (m. c. m.) de los denominadores:

$$\begin{array}{cc|c} 6 & 15 & 2 \\ 3 & 15 & 3 \\ 1 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & \end{array}$$

El m. c. m. de 6 y 15 es 2 x 3 x 5 = 30

$$\frac{7}{6}+\frac{8}{15} = \frac{7 \times 5}{6 \times 5}+\frac{8 \times 2}{15 \times 2} = \frac{35}{30}+\frac{16}{30} = \frac{35+16}{30} = \frac{\overset{17}{\cancel{51}}}{\underset{10}{\cancel{30}}} = \frac{17}{10}$$

La fracción $\frac{51}{30}$ simplificada por 3 da $\frac{17}{10}$

Luego, $\frac{7}{6}+\frac{8}{15} = \frac{51}{30} = \frac{17}{10}$

El mismo procedimiento se aplica a la adición de fracciones algebraicas, pues siempre se debe tener igual común denominador.

Resolvamos las adiciones siguientes de fracciones algebraicas:

1. $\frac{2x}{x-y}+\frac{6y}{x-y}$

Observamos que las dos fracciones algebraicas tienen igual denominador x - y, por tanto el resultado es la fracción cuyo numerador es la suma 2x + 6y:

$$\frac{2x}{x-y} + \frac{6y}{x-y} = \frac{2x+6y}{x-y}$$

2. $\dfrac{7a-3}{b+c} - \dfrac{2a+8}{b+c}$

En este caso se tiene en el numerador una resta de polinomios y se tiene igual denominador.

Hemos visto que toda resta de racionales o de enteros se convierte en suma del negativo (opuesto o inverso aditivo), esto es, en lugar de restar el polinomio del segundo numerador, se suma su inverso aditivo. Y queda así:

$$\frac{7a-3}{b+c} - \frac{2a+8}{b+c} = \frac{(7a-3)-(2a+8)}{b+c} = \frac{(7a-3)+[-(2a+8)]}{b+c}$$

$$= \frac{(7a-3)+[-2a-8]}{b+c} = \frac{7a-3-2a-8}{b+c} = \frac{(7a-2a)(-3-8)}{b+c} = \frac{5a-11}{b+c}$$

3. $\dfrac{5a}{8a^2b^3} + \dfrac{2b}{6a^4b}$

Se trata de una adición con fracciones de diferente denominador, y para efectuarla es necesario buscar un denominador común.

Existe infinidad de denominadores comunes. Buscamos el mínimo común múltiplo de los coeficientes 8 y 6, Así:

$$\begin{array}{cc|c} 8 & 6 & 2 \\ 4 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & & 2 \end{array}$$

El m. c. m. de 8 y 6 es 2 x 3 x 2 x 2 = 2^3 x 3 = 24

En la parte literal, la mayor potencia de ***a*** es 4, esto es, a^4 y la mayor potencia de ***b*** es 3, esto es, b^3.

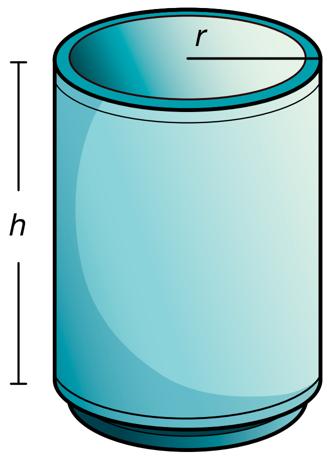
Entonces, amplificamos las fracciones, respectivamente así:

$$\frac{(5a)(3)}{(8a^2b^3)(3a^2)} + \frac{(2b)(4)}{(6a^4b)(4b^2)} = \frac{15a}{24a^4b^3} + \frac{8b}{24a^4b^3} = \frac{15a+8b}{24a^4b^3}$$

Multiplicación y división de fracciones algebraicas

En las fracciones algebraicas se aplica el mismo procedimiento de la multiplicación y la división de las fracciones que se han estudiado en los cursos anteriores.

Analicemos los siguientes problemas:



1. Un tanque cuya capacidad es de 20 litros contiene agua hasta los $\frac{3}{4}$ de su capacidad.

   Durante la noche se utilizaron los $\frac{2}{5}$ del líquido.

   a. ¿Cuántos litros tenía inicialmente?
   b. ¿Qué parte de la capacidad del tanque representa el agua utilizada durante la noche?
   c. ¿Cuántos litros se utilizaron durante la noche?

   Expliquemos la solución:

   a. Al tanque le caben 20 litros y está en los $\frac{3}{4}$ de su capacidad, lo cual significa que inicialmente tenía:

$$\frac{3}{4}(20) = \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{20}{1}\right) = \frac{60}{4} = 15$$

   Luego, inicialmente tenía 15 litros.

   b) Durante la noche se utilizó:

$$\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{\overset{3}{\cancel{6}}}{\underset{10}{\cancel{20}}} = \frac{3}{10}$$

   Así que durante la noche se utilizaron $\frac{3}{10}$ de la capacidad del tanque.

   c) Los litros de agua utilizada durante la noche son iguales a:

$$\frac{3}{10}(20) = \frac{\cancel{60}}{\cancel{10}} = \frac{6}{1} = 6$$

No olvidemos que la multiplicación de fracciones comunes se obtiene multiplicando entre sí los numeradores y los denominadores, dando como resultado otra fracción común formada por los productos obtenidos.

De la misma forma, el producto de dos fracciones algebraicas es también una fracción algebraica, cuyo numerador corresponde al producto de los numeradores y el denominador corresponde al producto de los denominadores de las fracciones propuestas, y también se puede simplificar a su mínima expresión.

Sigamos el procedimiento anterior para multiplicar las fracciones, con el ejercicio siguiente:

2. $$\left(\frac{x^2 - 3x}{-3x+10}\right)\left(\frac{2x - 15}{x^2 - 1}\right) = \frac{\left(x^2 - 3x\right)\left(2x - 15\right)}{\left(-3x+10\right)\left(x^2 - 1\right)}$$

Aplicamos la propiedad distributiva del producto con respecto a la suma:

$$\frac{\left(x^2\right)\left(2x - 15\right) - 3x\left(2x - 15\right)}{\left(-3x\right)\left(x^2 - 1\right) + 10\left(x^2 - 1\right)}$$

$$= \frac{\left(2x^3 - 15x^2\right) - \left(6x^2 + 45x\right)}{\left(-3x^3 + 3x\right) + \left(10x^2 - 10\right)}$$

$$= \frac{2x^3 - 15x^2 - 6x^2 - 45x}{-3x^3 + 3x + 10x^2 - 10}$$

$$= \frac{2x^3 - 21x^2 - 45x}{-3x^3 + 10x^2 + 13x - 10}$$

3. Con un botellón que contiene $1\frac{2}{3}$ litro de loción, se llenan frascos de $\frac{2}{6}$ litro.

¿Cuántos frascos se podrán llenar $1\frac{2}{3}$ litro de la loción?

Solución
El botellón contiene $1\frac{2}{3}$ litro y para saber cuántos frascos de $\frac{2}{6}$ litro se pueden llenar, hacemos la división:

$$1\frac{2}{3} \text{ entre } \frac{2}{6}$$

$$1\frac{2}{3} \div \frac{2}{6} = \left(1+\frac{2}{3}\right) \div \frac{2}{6} = \left(\frac{3}{3}+\frac{2}{3}\right) \div \frac{2}{6} = \frac{5}{3} \div \frac{2}{6}$$

Como dividir una fracción entre otra es multiplicar a la primera fracción por la fracción inversa de la segunda, entonces tenemos:

$$\frac{5}{3} \div \frac{2}{6} = \frac{5}{3} \text{x} \frac{6}{2} = \frac{30}{6} = 5$$

Entonces, con $1\frac{2}{3}$ litro de loción se llenan 5 frascos de $\frac{2}{6}$ litro.

Comprobación: $5 \text{x} \frac{2}{6} = \frac{10}{6}$

Simplificando por 2 tenemos: $\frac{10}{6} = \frac{5}{3} = \frac{3}{3} + \frac{2}{3} = 1\frac{2}{3}$

4. Realicemos la división $\frac{6x^2y^3}{4xy^2} \div \frac{2xy}{x^2y}$

Como entre fracciones, dividir es multiplicar por el inverso, entonces:

$$\frac{6x^2y^3}{4xy^2} \div \frac{2xy}{x^2y} = \frac{6x^2y^3}{4xy^2} \text{x} \frac{x^2y}{2xy} = \frac{\left(6x^2y^3\right)\left(x^2y\right)}{\left(4xy^2\right)\left(2xy\right)} = \frac{6x^4y^4}{8x^2y^3}$$

Simplificando la fracción, tenemos $\frac{6x^4y^4}{8x^2y^3} = \frac{\overset{3\,x^2y}{\cancel{6x^4y^4}}}{\underset{4}{\cancel{8x^2y^3}}}$

Aplicación

Resuelve los ejercicios siguiente y compara con algunos compañeros.

1. Una lata de arvejas tiene en su etiqueta la información de que tiene $3\frac{1}{2}$ porciones y que cada porción es de $\frac{1}{2}$ tasa.

   ¿Cuántas tasas de arvejas contiene la lata?

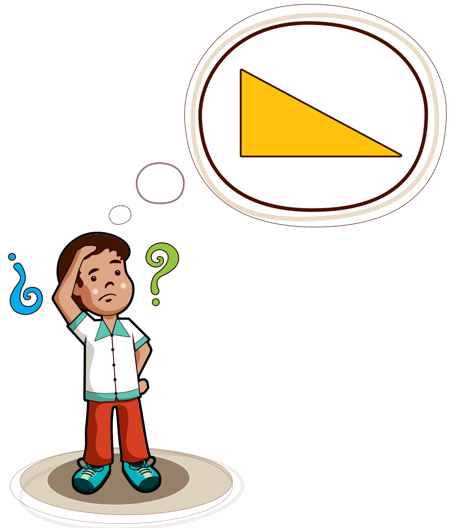
2. José gastó los $\frac{4}{5}$ de los $\frac{3}{2}$ de sus ahorros que eran \$800,000. ¿Con cuánto dinero quedó?

3. Una finca fue parcelada así: la mitad para cultivos, $\frac{2}{3}$ del resto para crianza de animales y el lote que quedó se dejó para vivienda. Si la finca tiene un área de 9,000 metros cuadrados, ¿cuántos m^2 se dispusieron para cada distribución?

4. Camila tiene 3 piezas o madejas de cinta de colores.
   ¿Cuántos pedazos de cinta de tamaño $\frac{7}{10}$ de metro pueden reunir si cada madeja que tiene Camila corresponde a $12\frac{1}{5}$ metros?

5. Calcula en metros el perímetro del rectángulo si el ancho es $24\frac{3}{8}$ cm más corto que el largo.

6. Toño debe calcular el perímetro del triángulo rectángulo de $7\frac{1}{5}$ dm de altura y $25\frac{1}{2}$ cm de base. Después Toño calculará su área.
   Ayudémosle a Toño a realizar estos cálculos.



7. Verifica que las fracciones siguientes sean equivalentes:

a. $\frac{3x}{2a}$ y $\frac{6x}{4a}$

b. $\frac{4m^3}{2x}$ y $\frac{20m^3}{10x}$

c. $\frac{x^2}{zw}$ y $\frac{4x^2}{4zw}$

d. $\frac{5a(x+y)^3}{a^2(x+y)^2}$ y $\frac{5(x+y)}{a}$

8. Simplifica hasta su mínima expresión:

a. $\frac{4a^2}{16a^4b}$

b. $\frac{45m^3n}{60m}$

c. $\frac{75wz^2y4}{100xyw}$

d. $\frac{-12x^2y}{8xy}$

e. $\frac{16abc}{56axy}$

f. $\frac{x^2-9}{x+3}$

9. Completa las operaciones siguientes:

a. $\frac{7a^2b^3}{2ab}+\frac{8a^2b^3}{2ab}=\frac{\qquad + \qquad}{2ab}$

b. $\frac{3x^2+2y}{2xy}+\frac{2x^2-5y+3}{2xy}=\frac{(\qquad)+(\qquad)}{2xy}=$

c. $\frac{8w^3x^4-6}{4wx}-\frac{4w^4-3w^3+8}{4wx}=\frac{(\qquad)+(\qquad)}{4wx}$

10. Simplificar:

a. $\left[\frac{x^2-9x+8}{x^2-3x-10}\right]\left[\frac{x^2-2x-15}{x^2-1}\right]$

b. $\left(\frac{28y-7}{15x}\right)\left(\frac{7y+5x}{9y^2}\right)$

c. $\frac{x^2+2xy+y^2}{2xy}\div\frac{x+y}{2x^2y}$

d. $\frac{x-y}{a-b}\div\frac{x-y}{2a-2b}$

Entendemos por…

Expresión algebraica una combinación de letras, números y signos de operaciones.Las letras suelen representar cantidades desconocidas y se denominan variables o incógnitas. Las expresiones algebraicas nos permiten traducir al lenguaje matemático expresiones del lenguaje habitual. Por ejemplo: Expresa el perímetro y el área de un terreno rectangular.

Tomado de http://maralboran.org/wikipedia/index.php/Expresiones_algebraicas

Diversión matemática

Diviértete, calculando los valores a y b de manera que cada fila, columna y diagonal tengan la misma suma.

a	$\frac{7}{10}$	$1\frac{1}{5}$
$1\frac{3}{10}$	$\frac{9}{10}$	b
$\frac{3}{5}$	$1\frac{1}{10}$	1

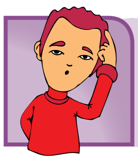
Día a día

Geometría de nuestro siglo

La geometría surgió para el hombre como una necesidad, con el objetivo de medir la tierra. Posteriormente olvidó, como tantas otras ciencias, sus orígenes.
Hizo uso desde un principio de la intuición y el razonamiento y progresó durante siglos incursionando otras ciencias.
Investigó además la medida y la forma del Universo, pero siempre pensando en un Universo estable y ordenado, aprehensible mediante la intuición, previsible y racional.
En nuestro siglo la idea del Universo fue cambiando: la Geometría Clásica no es capaz de dar respuesta a un universo en el que tiene cabida el caos, el azar, en el que se combina lo infinitamente pequeño y lo infinitamente grande: las partículas elementales y el cosmos.
Aparecieron otras Geometrías (u otras ramas de la Geometría), que reconvirtieron a esta ciencia en el estudio de las ciencias de la realidad y en el arte, entre el orden y el caos.

Tomado de http://www.oni.escuelas.edu.ar/olimpi99/fractales/principal.htm

Tema 2.
Gráficas de funciones lineal, cuadrática, exponencial, logarítmica y polinómica



Indagación
Recordemos las proporciones

Gumersinda prepara un bizcocho de chocolate para 6 personas (una porción para cada una). Cada porción contiene las cantidades de ingredientes siguientes:

150 gramos de mantequilla
225 gramos de azúcar
250 gramos de harina
7 barritas de chocolate
6 claras
6 yemas
1 cucharadita de vainilla

Preparación:

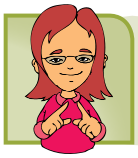
Batir la mantequilla con el azúcar hasta que esté cremosa. Agregar las yemas de una en una batiendo bien. Después, rayar el chocolate por la parte gruesa del rayador. Incorporar luego la harina. Finalmente, con las claras batidas a nieve y la vainilla, se deposita la preparación en un molde engrasado. Se deja en el horno, entre 50 y 55 minutos a calor moderado. ¿Suena delicioso no?

Copia en tu cuaderno la lista de ingredientes y las cantidades correspondientes y responde:

¿Cuáles serían las cantidades necesarias para que Gumersinda prepare el bizcocho de chocolate?, para:

a. 3 porciones
b. 9 porciones
c. 15 porciones
d. 12 porciones

Resuélvelo con dos o tres compañeros y compara con otros grupos.



Conceptualización
Funciones

Una vez has realizado y comparado tus cálculos, completa la tabla siguiente, en tu cuaderno:

N.° Porciones	Mantequilla	Azúcar	Harina	Chocolate	Huevos	Vainilla
3						
6	150g	225g	250g	7 barritas	6	1 cucharadita
9						
12						
15						

Ahora, fíjate que si cambia el número de porciones, cambia también, en la misma proporción, la cantidad de cada ingrediente.

Entonces decimos que la cantidad de ingredientes está en función del número de porciones. En general: f(porciones) = gramos de mantequilla.

Sea x el número de porciones, $f(x)$ = gramos de mantequilla. Así:

$f(3) = ?$
$f(6) = 150$
$f(9) = ?$
$f(12) = ?$
$f(15) = ?$

¿Cuántos gramos de mantequilla serán necesarios para 1 porción?

Veamos:

Si para 6 porciones se necesitan 150 g de mantequilla, entonces para 3 porciones se necesitarán 75 g, porque 3 es la mitad de 6 y 75 es la mitad de 150. Y para 1 porción se necesitarán 25 g, porque 1 es la tercera parte de 3, así como 25 es la tercera parte de 75.

En general, $f(x) = 25x$, porque:
si $x = 1$, entonces $f(1) = 25(1) = 25$ (para 1 porción, 25g de mantequilla);
si $x = 3$, entonces, $f(3) = 25(3) = 75$ (para 3 porciones, 75g de mantequilla);
si $x = 6$, entonces, $f(6) = 25(6) = 150$ (para 6 porciones, 150g de mantequilla).

Ahora, llamemos $h(x)$ a los gramos de azúcar, según la tabla anterior, $h(6) = 225$.

Calculemos:

$h(3) = 112.5$, porque 3 es la mitad de 6 y 112.5 es la mitad de 225;
$h(1) = 37.5$, porque 1 es un tercio de 3 y 37.5 es un tercio de 112.5.

En general $h(x) = 37.5x$.

Porque:

$h(1) = (37.5)(1) = 37.5;$
$h(2) = (37.5)(2) = 75;$
$h(3) = (37.5)(3) = 112.5;$
$h(4) = (37.5)(4) = 150;$
$h(5) = (37.5)(5) = 187.5;$
$h(6) = (37.5)(6) = 225.$

Así podemos hacer con los demás ingredientes, por ejemplo, podemos llamar:

k(x) = gramos de harina
t(x) = barritas de chocolate
j(x) = número de huevos
p(x) = cucharaditas de vainilla

y luego encontrar la cantidad de cada ingrediente según el número de porciones.

Decimos, entonces, que

Un valor está en función de otro si el valor del primero depende del valor del segundo.

Por ejemplo, sabemos que la longitud de una circunferencia depende de la longitud de su radio.

Asignémosle la letra x a la medida del radio y la letra y a la longitud de la circunferencia.

Se puede observar que siempre que cambia el valor de x cambia el valor de y, entonces decimos que la longitud de una circunferencia (y) está en función de la longitud de su radio (x).

Simbólicamente: $y = f(x) = 2\pi x$.

Un símbolo o literal que representa un valor específico recibe el nombre de constante.
Un literal o símbolo que puede adquirir diferentes valores recibe el nombre de variable.

Así, en la expresión anterior, π solo puede tomar un valor único (3.1416…), por lo tanto es constante, como también lo es 2.

En cambio, la medida del radio varía independientemente en cada circunferencia y su longitud también cambia, pues depende de la medida que adquiera el radio. Por tanto, radio (x) y longitud de circunferencia (y) son variables.

En este caso, el radio (x) se llama **variable independientemente** y como la longitud de la circunferencia depende del valor del radio, entonces la longitud de la circunferencia (y) se llama **variable dependiente**.

Esto es:

- Si el radio es 1 cm, la longitud de la circunferencia es 2π(1 cm) = 6.2832 cm.
- Si el radio es 5 cm, la longitud de la circunferencia es 2π(5 cm) = 31.416 cm.
- Si el radio es 10 cm, la longitud de la circunferencia es 2π(10 cm) = 62.832 cm.

Lo anterior también puede representarse así:

$$1\text{cm} \xrightarrow{2(3.1416)} 6.2832\text{cm}$$

$$5\text{cm} \xrightarrow{2(3.1416)} 31.416\text{cm}$$

$$10\text{cm} \xrightarrow{2(3.1416)} 62.832\text{cm}$$

Así, de acuerdo con los valores que adquiere x (variable independiente), variará el valor de y (variable dependiente), y se formarán con cada pareja correspondiente (x, y) o (x, f(x)) que son los pares ordenados o coordenadas de la gráfica.

Los datos de x y de y se pueden agrupar en una tabla, que puede ser horizontal o vertical, anotando en el primer renglón los valores de x y en el segundo los de y.

Por ejemplo, para la función $\mathbf{y = 2\pi x}$ construimos la tabla ya sea vertical u horizontal.

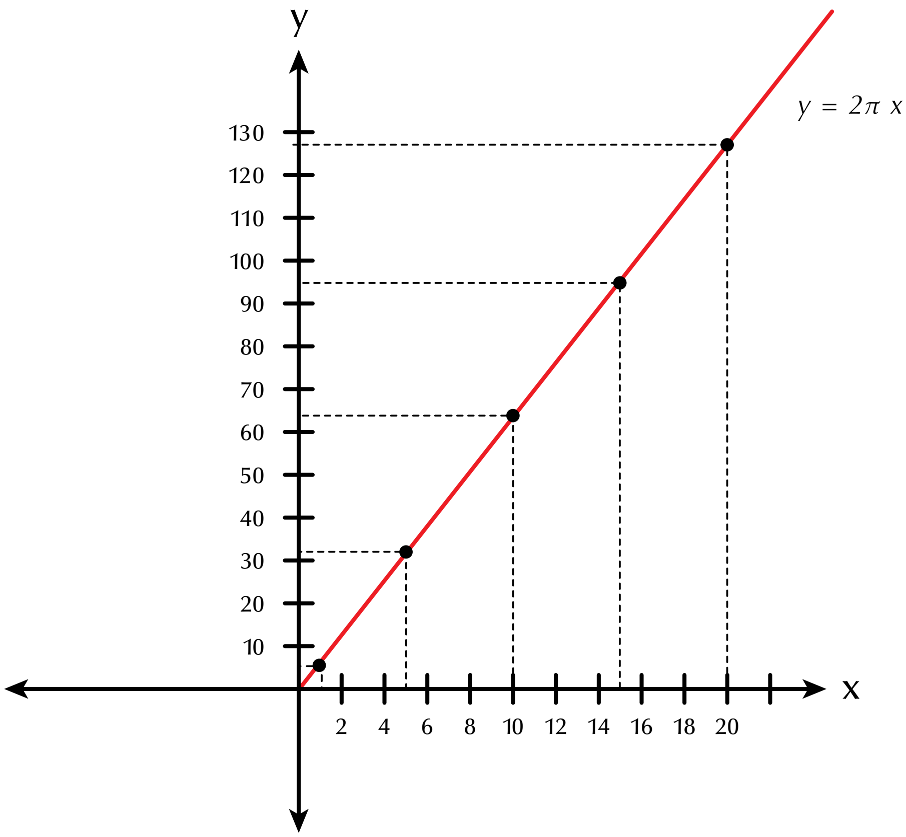
Tabla vertical

x	y	Coordenadas (x, y)
1	6.2832	(1, 6.2832)
5	31.416	(5, 31.416)
10	62.832	(10, 62.832)
15	94.248	(15, 94.248)
20	125.664	(20, 125.664)

Tabla horizontal

x	1	5	10	15	20
$y = \mathbf{2\pi x}$	6.2832	31.416	62.832	94.248	125.664

Estos datos pueden representarse en forma gráfica, localizando en el plano cartesiano los pares ordenados y uniendo dichos puntos, así:



Esta es la representación gráfica de la función $y = 2\pi x$ o puede escribirse como $f(x) = 2\pi x$.

Otro ejemplo:

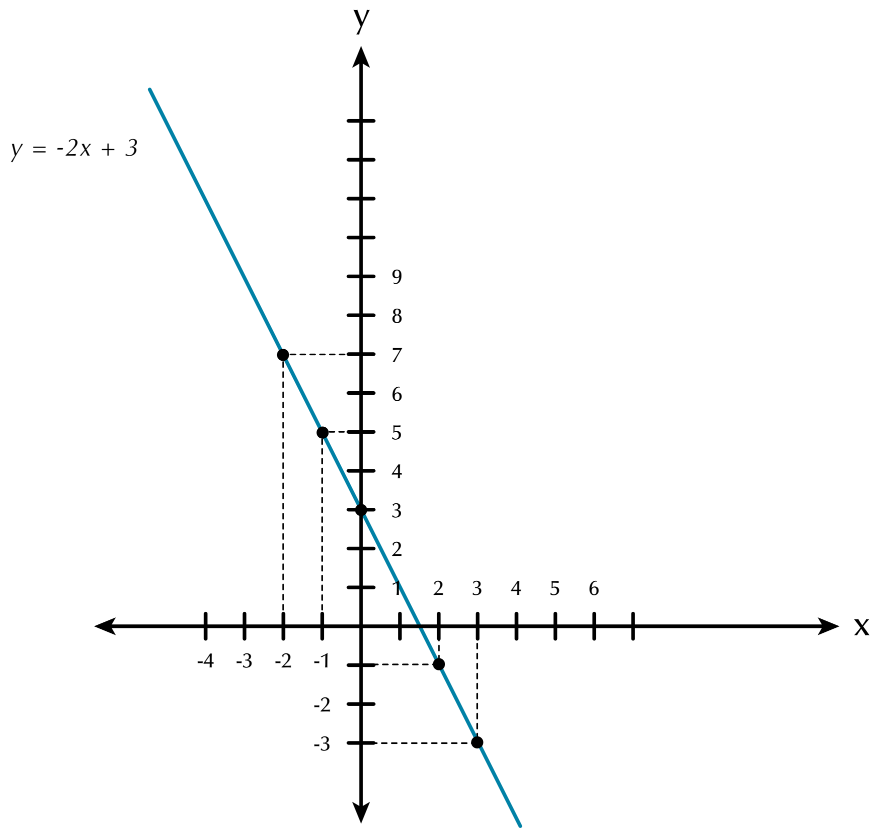
Representemos en el plano cartesiano la función $y = -2x + 3$.

Para realizar la tabulación, se dan valores arbitrarios a x que es la variable independiente y según esos valores, se obtendrán los de y que es la variable dependiente.

Si $x = 0$, entonces $y = f(0) = -2(0) + 3 = 3$.
Si $x = -1$, entonces $y = f(-1) = -2(-1) + 3 = 2 + 3 = 5$.
Si $x = 1$, entonces $y = f(1) = -2(1) + 3 = - 2 + 3 = 1$.
Si $x = 2$, entonces $y = f(2) = -2(2) + 3 = - 4 + 3 = -1$.
Si $x = -2$, entonces $y = f(-2) = -2(-2) + 3 = 4 + 3 = 7$.
Si $x = 3$, entonces $y = f(3) = -2(3) + 3 = -6 + 3 = -3$.

Resumiendo, tenemos la tabulación:

x	0	-1	1	2	-2	3
y	3	5	1	-1	7	-3

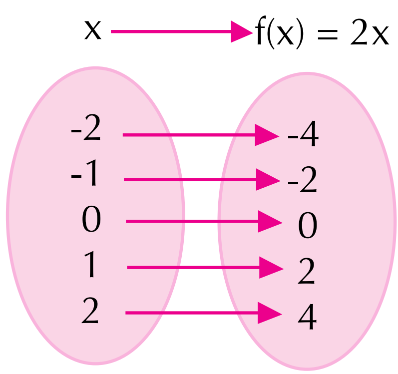


Una función puede ser de primero, segundo, tercero u otro grado, de acuerdo con el mayor exponente que tenga x en la ecuación, y la representación gráfica de cada una de ellas tendrá características particulares.

A las funciones cuya gráfica es una línea recta se le denomina **funciones de gráfica lineal**.

Analicemos ahora la función "el doble de". Simbólicamente, escribiremos $y = f(x) = 2x$.

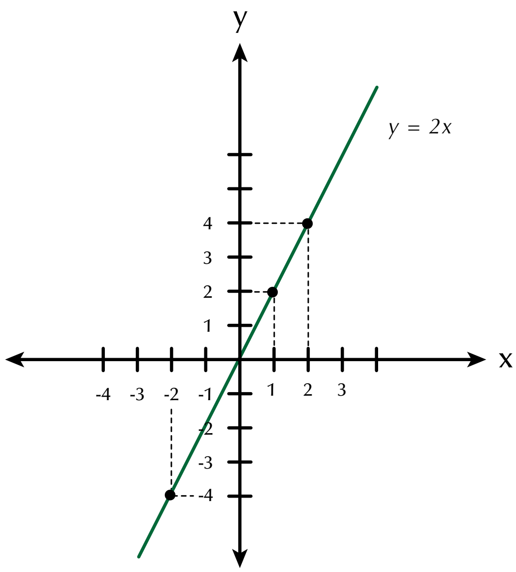
La variable independiente es x, entonces le damos los valores que queramos y obtendremos siempre el doble del valor dado:



Anotamos los valores en una tabla así:

x	-2	-1	0	1	2
f(x)	-4	-2	0	2	4

Representamos esas parejas en el plano cartesiano:



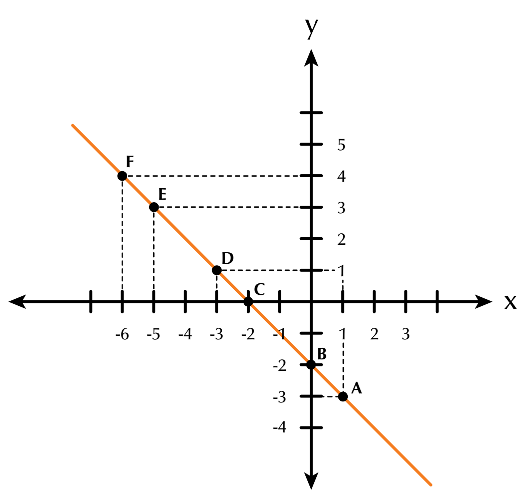
Podemos realizar el proceso contrario, nos dan una gráfica, en el plano cartesiano, para que identifiquemos la localización de algunos puntos.

Por ejemplo, dada la gráfica, identifiquemos los puntos A, B, C, D, E y F.

Solución

Tomemos el punto A.

Buscamos la coordenada en x a través del segmento vertical entrecortado que va desde el punto A hasta 1 en el eje de las x, después buscamos la coordenada en y, por el segmento horizontal entrecortado que va desde el punto A hasta -3 en el eje y.



Por tanto, las coordenadas del punto A son (1, -3) y las coordenadas de los demás puntos son:

B(0, -2); C(-2, 0); D(-3, 1); E(-5, 3); F(-6, 4).

Comprueba sobre la gráfica que esas coordenadas corresponden a esos puntos.

Familias de rectas

Recordemos que toda ecuación lineal o de primer grado con dos variables tiene por gráfica una línea recta.

Vamos a graficar dos familias de rectas de la forma y = mx + b: una familia de rectas que tiene el mismo coeficiente de x(m) y otra familia de rectas que tiene el mismo término independiente (b).

1. Familia de rectas de la forma y = mx + b, que tiene el mismo coeficiente de x(m).

Por ejemplo, grafiquemos el conjunto de rectas

$$\left[\begin{array}{l} y = 2x - 1 \\ y = 2x + 2 \\ y = 2x + 4 \end{array}\right.$$

Para realizar las construcciones, es necesario dar valores a x (variable independiente) y encontrar los valores correspondientes a y (variable dependiente), como sigue:

y= 2x-1

x	y
-4	-9
-2	-5
0	-1
2	3

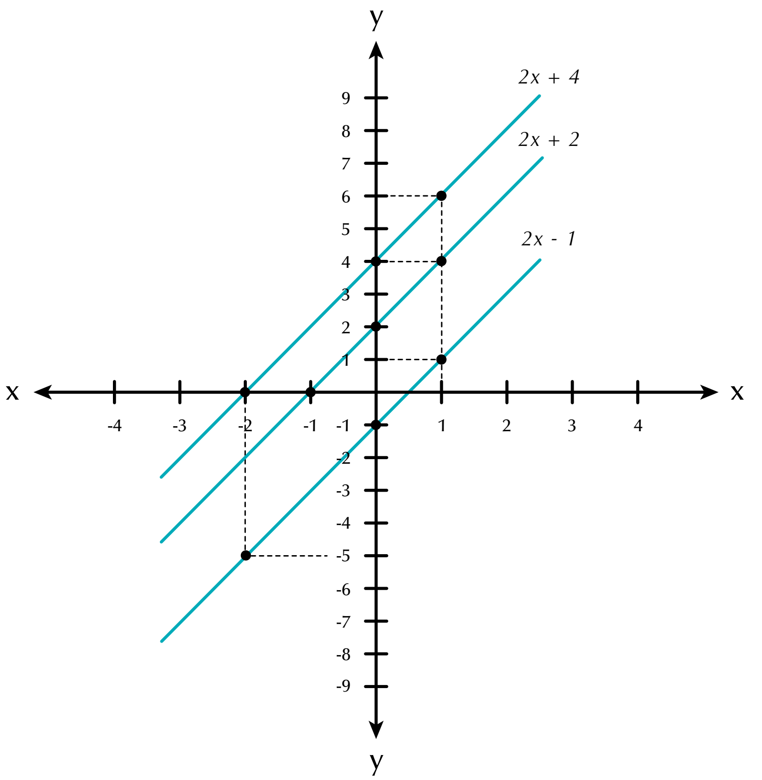
y= 2x+2

x	y
-4	-6
-2	-2
0	+2
2	6

y= 2x+4

x	y
-4	-4
-2	-0
0	4
2	8

Las graficamos en el mismo plano cartesiano:



2. Familia de rectas de la forma y = mx + b, que tiene el mismo término independiente (b).
   Por ejemplo:

$$\left[\begin{array}{l} y = 2x - 3 \\ y = 4x - 3 \\ y = 6x - 4 \end{array}\right.$$

Para construir su gráfica, es necesario dar valores a x (variable independiente) y encontrar los valores correspondientes a y (variable dependiente), como sigue:

y= 2x-3

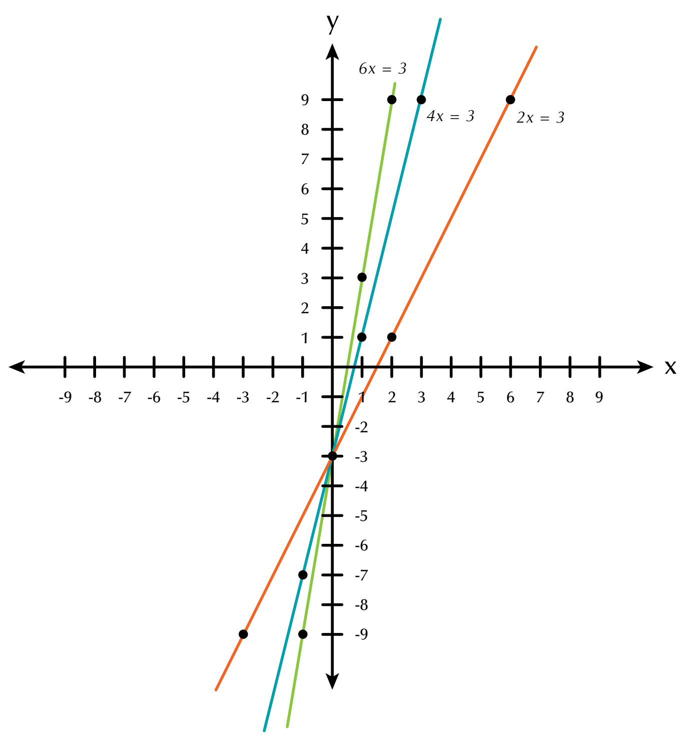
x	y
-3	-9
0	-3
2	1
6	9

y= 4x-3

x	y
-1	-7
0	-3
1	1
3	9

y= 6x-3

x	y
-1	-9
0	-3
1	3
2	9



Ahora se observa un comportamiento diferente en estas gráficas, ya que se cortan o intersecan en un punto determinado.

¿Qué las hace tener ese punto en común?

El término b tiene un valor constante en las tres ecuaciones ($b = -3$).

Esto quiere decir que cuando en la familia de rectas de la forma $y = mx + b$ se tiene un mismo valor para b, las rectas que se obtienen se cortan en el punto (0, b).

De acuerdo con los ejemplos anteriores se puede concluir, entonces, que el comportamiento de una familia de gráficas que corresponde a la forma $y = mx + b$, se resume de la siguiente forma:

1. ***Cuando la variable independiente x tenga un coeficiente constate (m), las rectas que se obtienen en la gráfica serán siempre paralelas entre sí.***

2. ***Cuando el término independiente b tenga un valor constante, las rectas que se obtienen en la gráfica se cortarán en un punto.***

Función cuadrática

Vamos a graficar la función $y = x^2$.

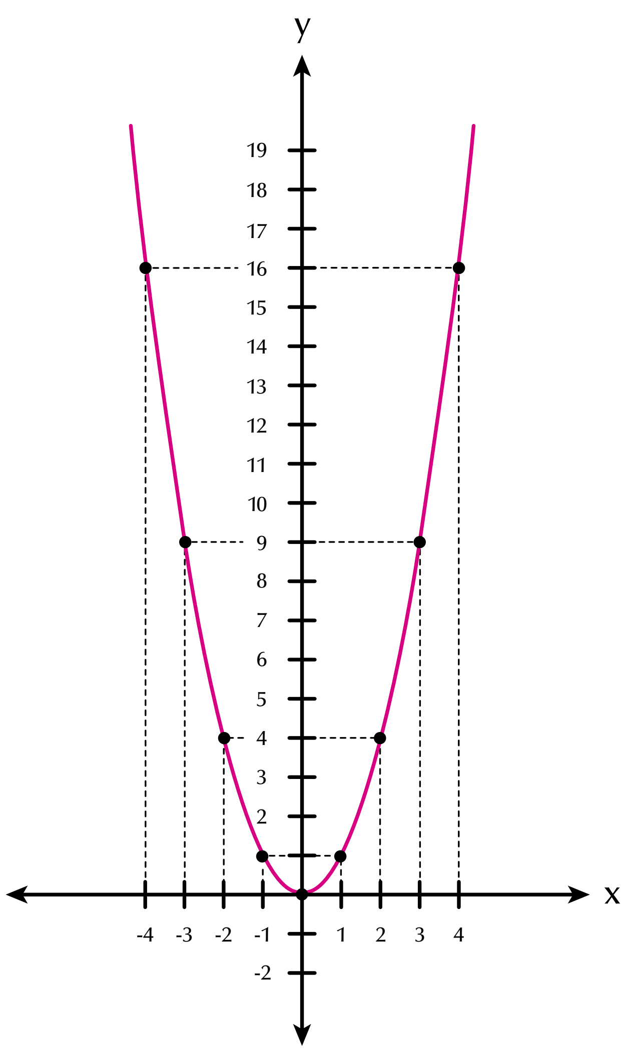
Como la variable x es independiente, entonces le damos los valores que queramos y el valor de y será el cuadrado de cada valor que le vamos dando a x.

Así: si $x = 0$, entonces $y = x^2 = 0^2 = 0$.

Si $x = -1$, entonces $y = x^2 = (-1)^2 = (-1)(-1) = 1$.

Del mismo modo comprueba los valores de la tabla:

x	0	-1	1	2	-2	3	-3	4	-4
F(X)	0	1	1	4	4	9	9	16	16



La **función cuadrática $y = x^2$** es una parábola que se abre hacia arriba y tiene el vértice en el punto (0, 0) que es el origen del plano cartesiano.

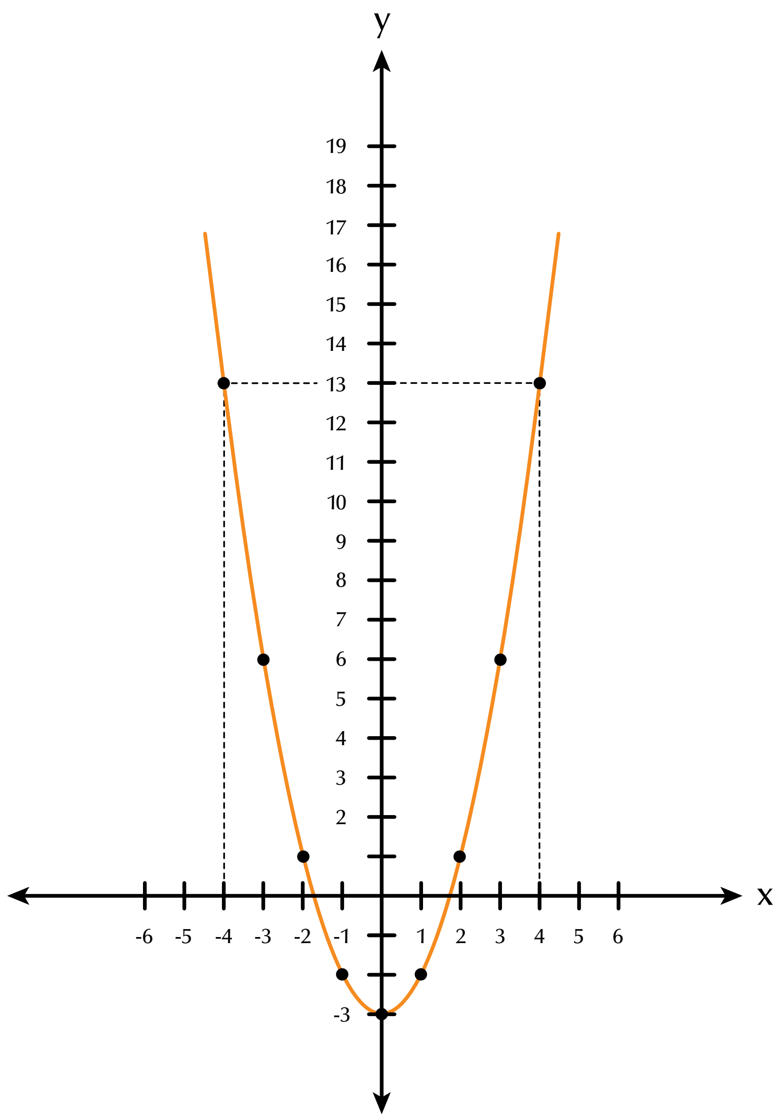
Aunque existen otras parábolas que no tienen su vértice en el origen del plano cartesiano, como por ejemplo, la representación de $y = x^2 - 3$.

$y = x^2 - 3.$

Si $x = -2$, $y = (-2)^2 - 3 = 4 - 3 = 1$ → $(-2, 1)$
Si $x = -1$, $y = (-1)^2 - 3 = 1 - 3 = -2$ → $(-1, -2)$
Si $x = 0$, $y = (0)^2 - 3 = 0 - 3 = -3$ → $(0, -3)$
Si $x = 1$, $y = (1)^2 - 3 = 1 - 3 = -2$ → $(1, -2)$
Si $x = 2$, $y = (2)^2 - 3 = 4 - 3 = 1$ → $(2, 1)$

x	y
-2	1
-1	-2
0	-3
1	-2
2	1

Observa que la gráfica de la función $y = x^2 - 3$ tiene la variable x elevada a la 2, es una parábola y corta al eje de la y en -3, es decir, su vértice es el punto (0;-3).



Damos valores a x y buscamos el valor de y, luego elaboramos la tabla y graficamos en el plano cartesiano:

Función exponencial

En un comienzo, los exponentes se introdujeron para indicar un método corto que mostrara el producto de varios factores semejantes y solo se consideraron exponentes naturales.

La función exponencial se presenta en los fenómenos observables, tales como la reproducción de una colonia de bacterias, la desintegración de una sustancia radiactiva, algunos crecimientos demográficos, la inflación, la capitalización de un dinero colocado a interés compuesto, etc.

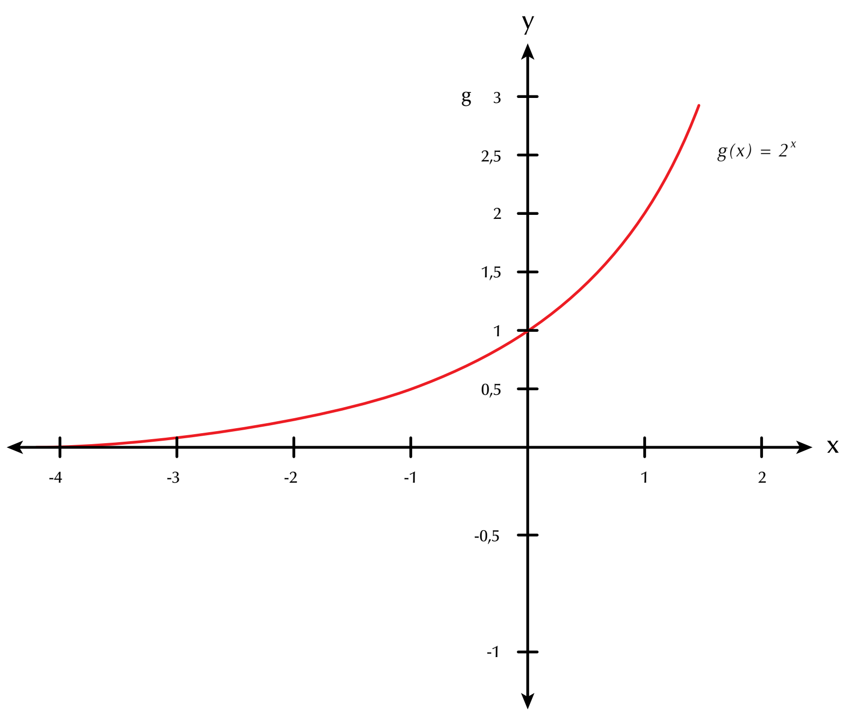
La función **$y = g(x) = 2^x$** es una nueva función llamada **función exponencial**, en la cual el valor que va cambiando es el exponente x.

Se trata de una función con una base constante, en este caso 2, elevada a una variable x.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(X)	1/8	1/4	1/2	1	2	4	8

La tabla siguiente muestra algunos valores para la función de base dos: **$g(x) = 2^x$**.

Para graficar esta función, localizamos estos puntos en un plano cartesiano, uniéndolos con una curva.



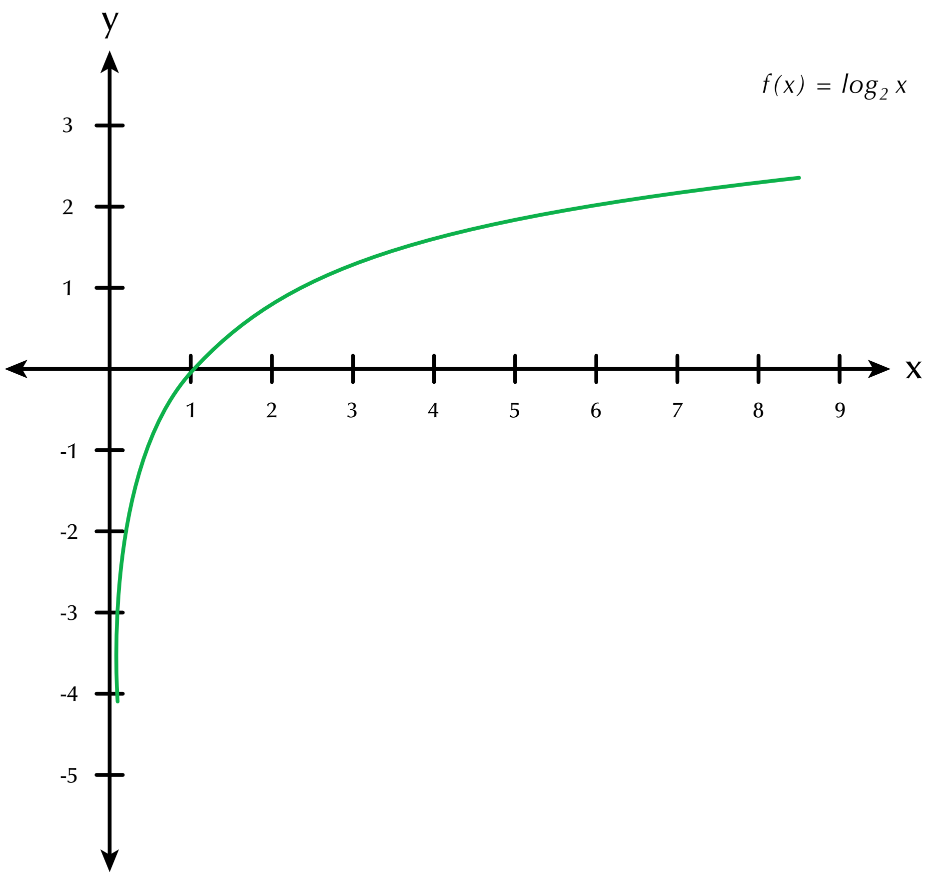
Función logarítmica

La **función logarítmica** en base **a** es la función inversa de la exponencial en base **a**.

Por lo tanto, si en la función exponencial graficamos **$g(x) = 2^x$** , en la función logarítmica graficamos la inversa de ella.

Llamemos f(x) a la función inversa de **$g(x) = 2^x$**, esto es, $f(x) = \log_2 x$.

x	1/8	1/4	1/2	1	2	4	8
f(x)	-3	-2	-1	0	1	2	3



Función polinómica

Las **funciones polinómicas** pueden ser de primer grado, segundo grado o más según tenga una variable elevada a la 1, a la 2 o más.

Anteriormente hemos graficado funciones lineales, cuadráticas, exponenciales y logarítmicas.

Ya conoces el proceso de tabular y graficar en el plano cartesiano.

Por ejemplo:

$y = 5x + 3$ es una función polinómica de primer grado cuya representación gráfica es una recta.

$y = -2x^2 + x - 1$ es una función polinómica de segundo grado cuya representación gráfica es una parábola.

Como ejercicio, grafica en tu cuaderno las funciones polinómicas $y = 5x + 3$ y $y = -2x^2 + x - 1$.

Para lo cual, das valores a x como variable independiente y deduces los valores de y.

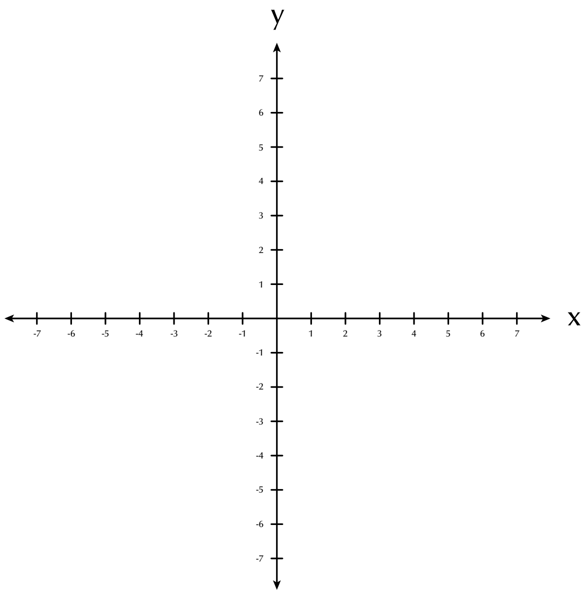
Consignas los valores de x y de y en una tabla y realizas la gráfica en el plano cartesiano:

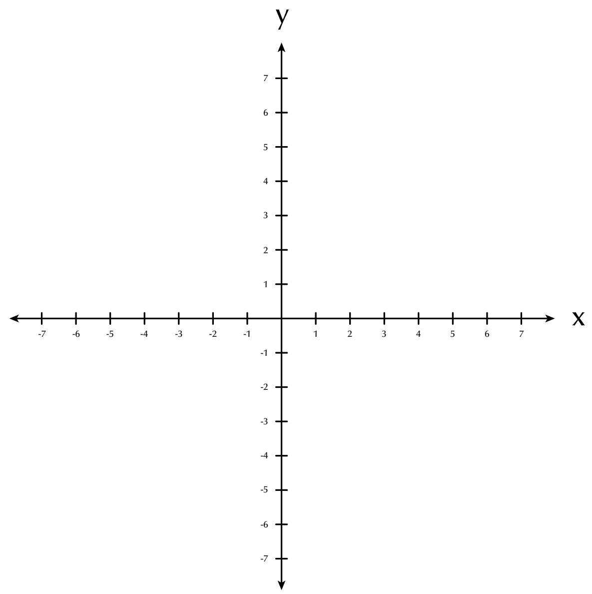
$y = 5x + 3$

x				
y				

$y = -2x^2 + x - 1$

x				
y				



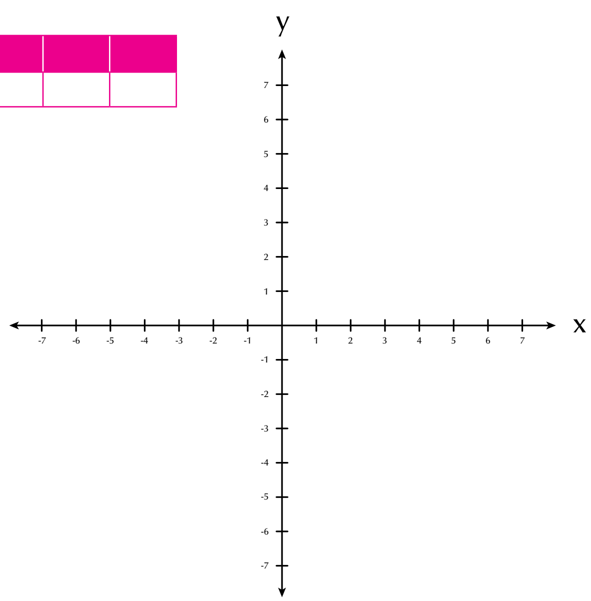


Aplicación

Copia los ejercicios en tu cuaderno, soluciónalos y después compara y comenta las soluciones con algunos de tus compañeros.

Tomando como modelo la tabla y el plano cartesiano adjuntos, grafica cada función:

x							
f(x)=y							



1. $y = 3x - 2$

2. $y = 1 - x$

3. $y = x^2 - 3$

4. $y = x^2 + 2x - 2$

5. $y = \frac{1}{4}x$

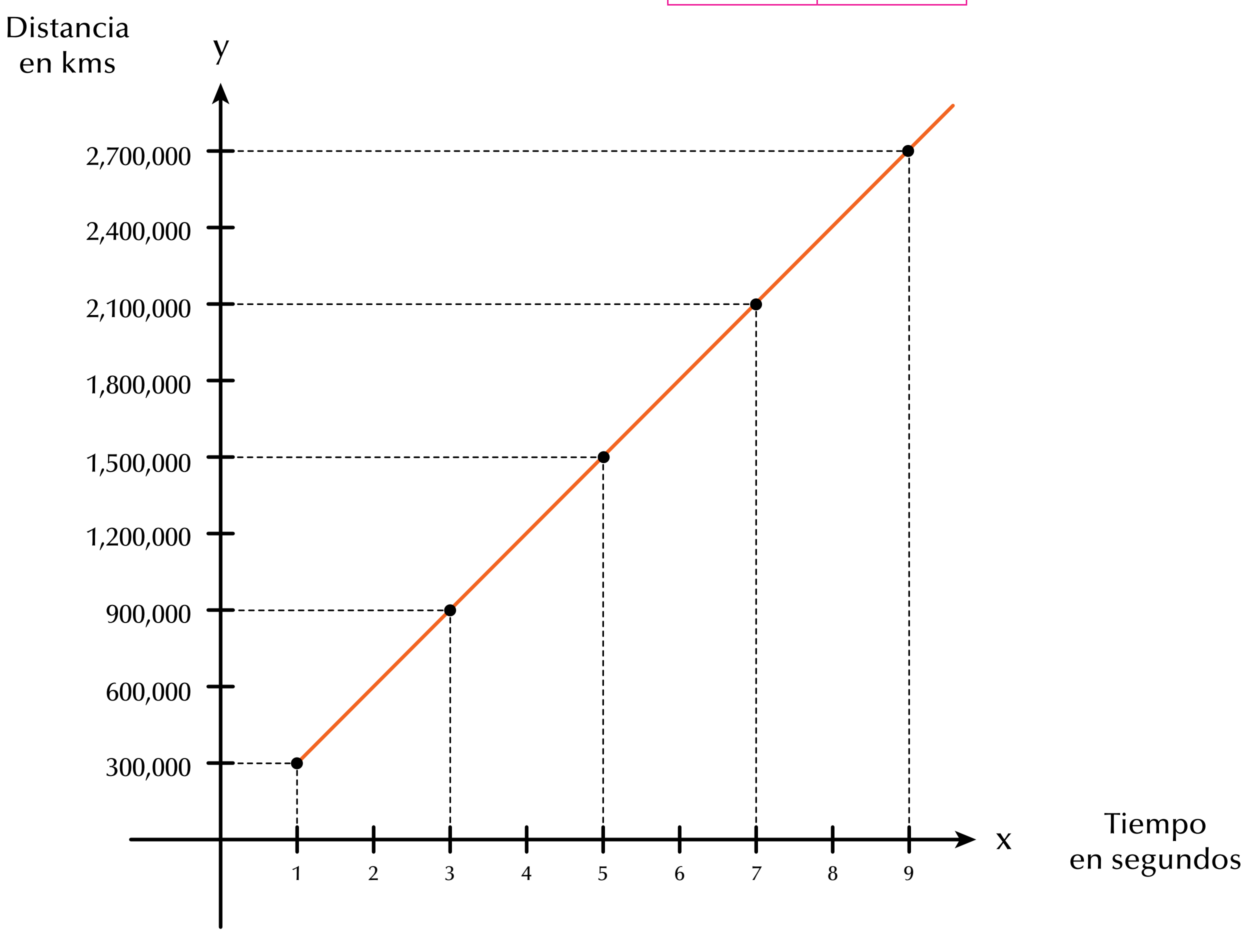
6. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

7. $y = x^2 + x + \frac{1}{7}$

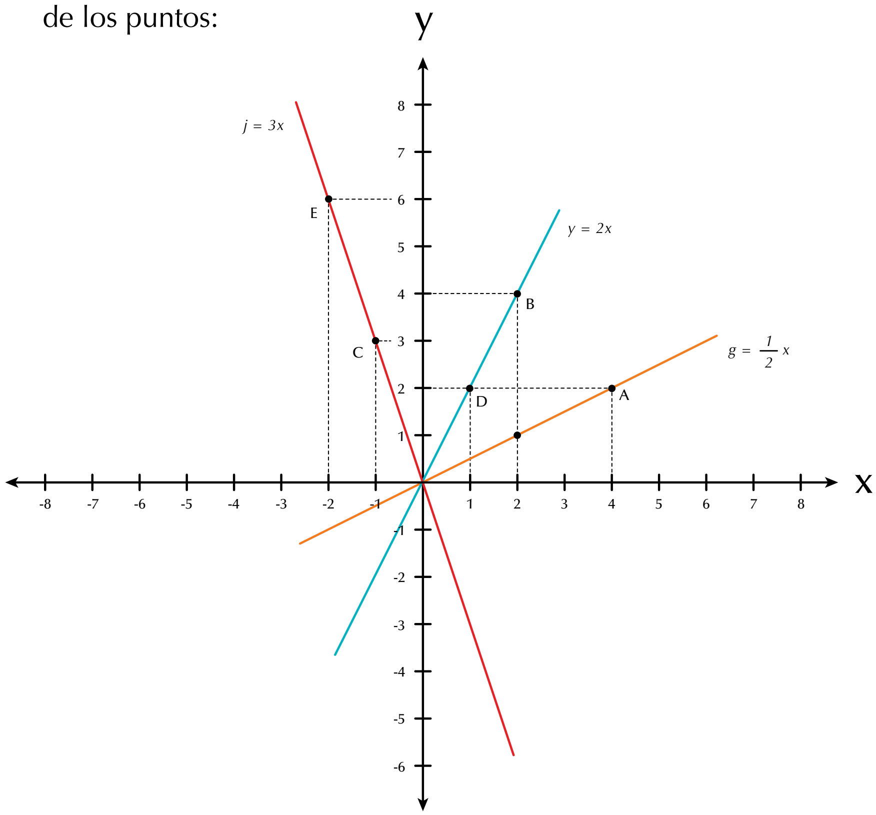
8. La gráfica muestra el recorrido en kilómetros que un rayo de luz hace en tiempos de segundos.
   Observa la gráfica y completa la tabla.

   Recorrido de una rayo de luz, a la velocidad de 300,000 Km/Seg

x (Seg)	y (Km)
1	
3	
5	
7	
9	



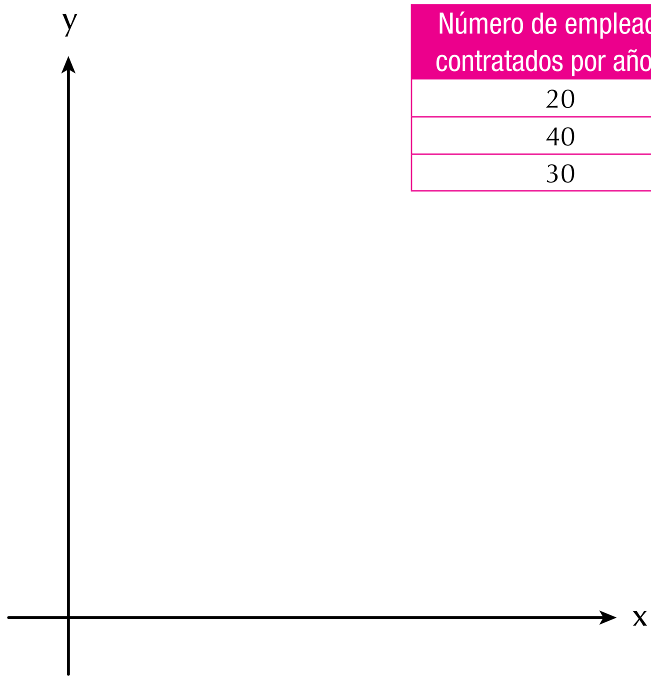
9. Dada la familia de rectas en el plano cartesiano, escribe las coordenadas de los puntos:



A=
B=
C=
D=
E=

10. Una empresa con 20 trabajadores tuvo en su primer año de labores $120,000,000 de ganancias. Al siguiente año, duplicó el número de empleados, situación que triplicó sus ganancias. El tercer año despidió a la cuarta parte de sus empleados y sus ganancias bajaron una tercera parte. Con los anteriores datos, completa la tabla y ubícalos en el plano cartesiano.

Número de empleados contratados por año (x)	Ganancias por año (y)
20	120,000,000
40	360,000,000
30	240,000,000



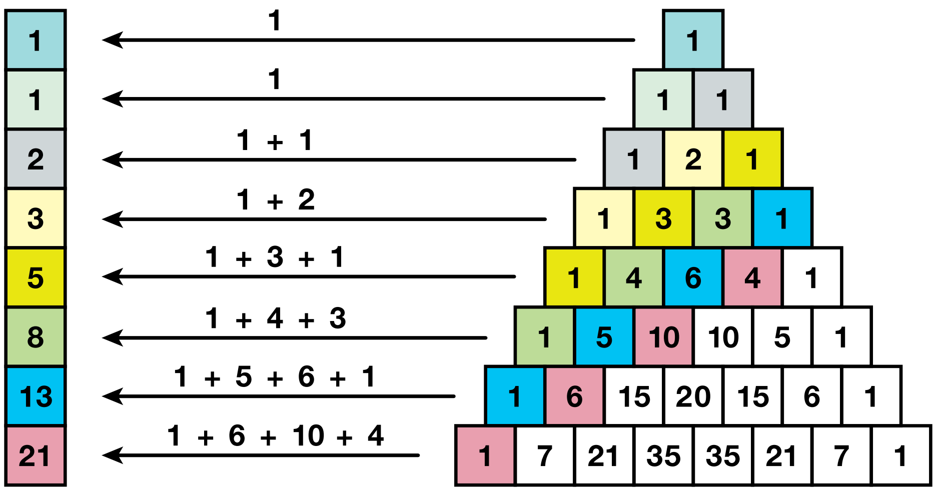
Entendemos por…

Graficar dibujar o trazar en una recta numérica o en un plano cartesiano los puntos indicados.

Diversión matemática

Sucesión de Fibonacci

Prueba esto: empieza con un 1 de la izquierda, da un paso arriba y uno al lado, suma los cuadrados donde caigas (como en el dibujo); las sumas que salen son la sucesión de Fibonacci. (La sucesión de Fibonacci se hace sumando dos números para conseguir el siguiente, por ejemplo 3 + 5 = 8, después 5 + 8 = 13, etc.).

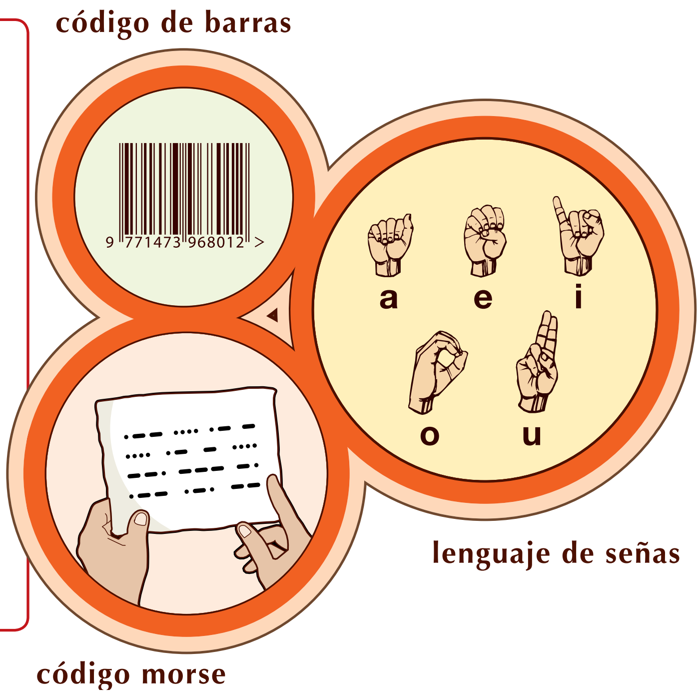


Día a día

Teoría de códigos

La teoría de códigos es una especialidad de la matemática que trata de las leyes de la codificación de la información. A grandes rasgos, codificar es transformar una información en una señal convenida para su comunicación. Decodificar sería el proceso inverso y complementario del anterior, en el que la señal comunicada se transforma en la información original. El auge de las comunicaciones a partir de la segunda mitad del siglo XX motivó un fuerte desarrollo de la teoría de códigos.

Tomado de http://es.wikipedia.org/wiki/Teor%C3%ADa_de_c%C3%B3digos

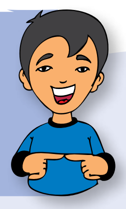


Este capítulo fue clave porque

Aprendí a:

- Simplificar fracciones algebraicas, aplicando lo aprendido en los cursos anteriores sobre los números racionales.
- Representar gráficamente una situación algebraica.
- Calcular el valor numérico de una expresión algebraica.
- Operar polinomios.
- Calcular productos y cocientes notables.
- Factorizar expresiones algebraicas.
- Graficar diferentes tipos de funciones.

Conectémonos con La Biología

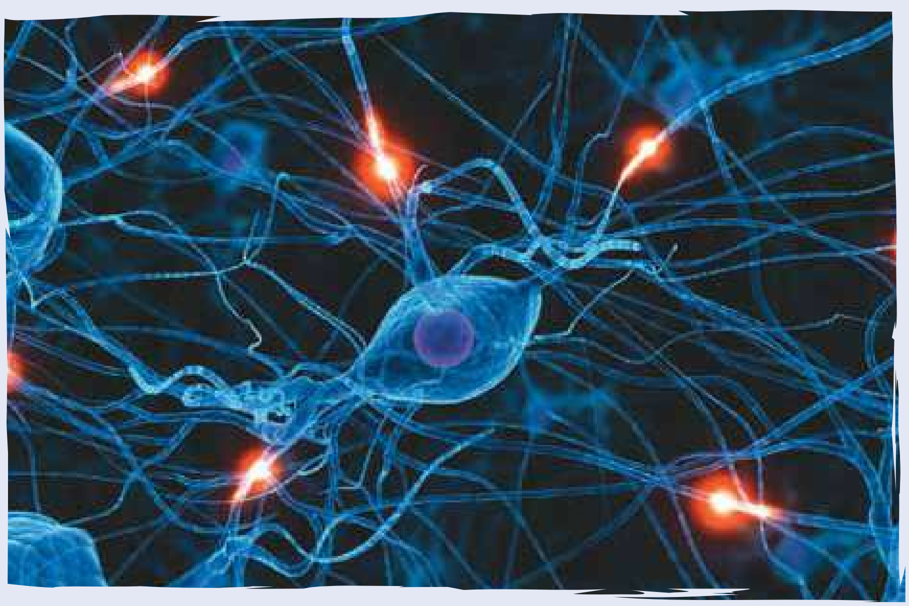


Las *neuronas* (del griego VεŨPOV, cuerda, nervio) son células del sistema nervioso cuya principal característica es la excitación eléctrica de su membrana plasmática.

Las neuronas están especializadas en la recepción de estímulos nerviosos entre ellas o con otros tipos celulares, como por ejemplo con las fibras musculares. La mayoría de las neuronas no se dividen una vez alcanzada su madurez.

Se estima que cada cerebro humano posee en torno a 10^{11} neuronas: es decir, unos cien mil millones.

Tomado de http://es.wikipedia.org/wiki/Neurona



Repasemos lo visto

Al inicio de la unidad te preguntamos: ¿para qué sirve el álgebra?

Recordemos que:

- El álgebra es una invención de los árabes y se expandió por Europa en el siglo XII.

- La utilización de letras en matemáticas se remonta a la época de los griegos que escribían los números mediante letras y aún hoy se conserva tal representación.

- No olvidemos la importancia de las expresiones algebraicas, especialmente de los polinomios que podemos sumarlos, multiplicarlos, dividirlos, calcularles valores numéricos y factorizarlos.

- Además, que las expresiones algebraicas fraccionarias tienen su importancia en cuanto a que pueden ser simplificadas y operadas.

Mundo rural

El ajedrez y los granos de trigo

Una conocida leyenda oriental ofrece una descripción muy exacta de una función exponencial. Cuenta que un rey quiso premiar las dotes adivinatorias del sumo sacerdote que había predicho una extraordinaria victoria en una batalla.

El sacerdote pidió 2 granos de trigo por la primera casilla de un tablero de ajedrez, 4 por la segunda, 8 por la tercera, y así sucesivamente, es decir, el doble cada vez por cada nueva casilla.

El rey pareció complacido por la modestia del sacerdote hasta que comprobó la magnitud de su petición: 264 + 263 +... + 22 +... + 2 granos de trigo, una cantidad inimaginable, que no se almacenaba en todo el reino.

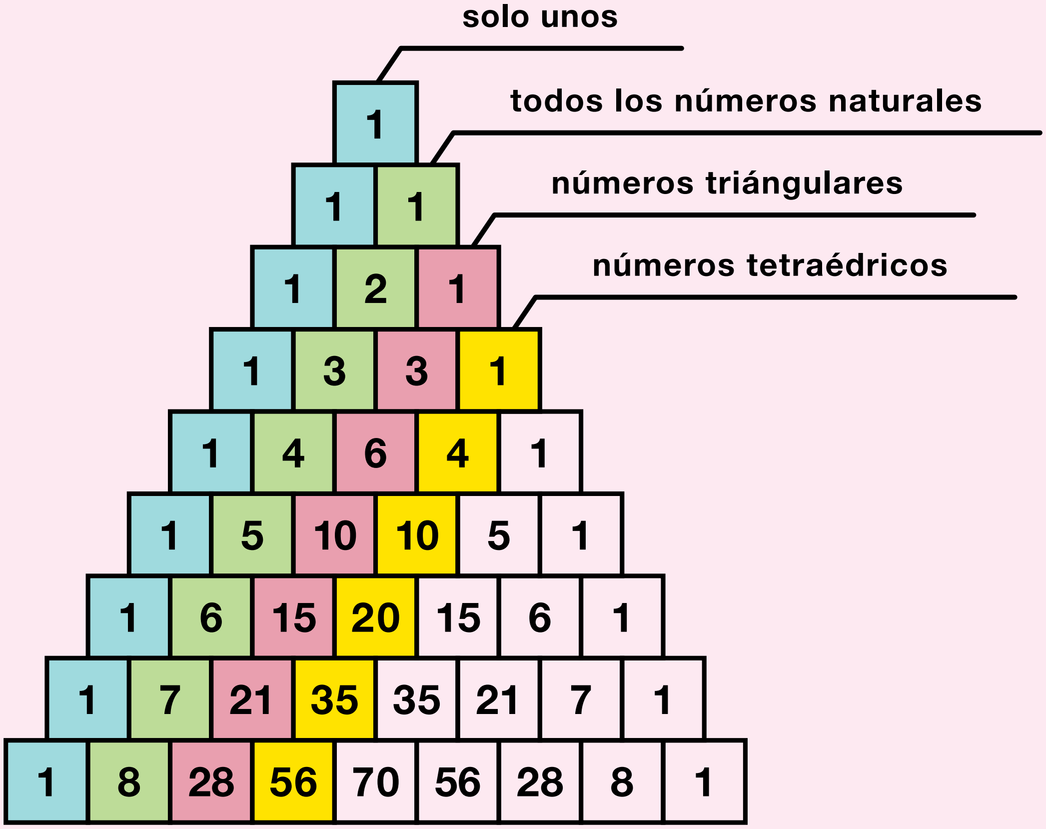
Los sumandos de esta expresión responderían, en la notación matemática actual, a la función 2x, para el dominio x = 1, 2, 3,..., 64.

Tomado de http://html.rincondelvago.com/funciones-matematicas_2.html

Dato curioso

Curiosidades del triángulo de Pascal

Una de las pautas de números más interesantes es el triángulo de Pascal, llamado así en honor a Blaise Pascal, un famoso matemático y filósofo francés del siglo XVII.



La primera diagonal está compuesta por solo números unos.
La segunda diagonal son los números naturales (1, 2, 3,...).
La tercera diagonal son los números triangulares
(1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36...).
La cuarta diagonal son los números tetraédricos o piramidales
(1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, 120, 165...).

Tomado de http://www.disfrutalasmatematicas.com/triangulo-pascal.html

¿En qué vamos?

Coevaluación: "Reflexiono y trabajo con mis compañeros":

Copia en tu cuaderno cada uno de los siguientes ejercicios; luego, resuélvelos y compáralos con algunos de tus compañeros:

1. $(a^5+7b^4)^2$

2. $(3x^4-5xy^3)^2$

3. Completa la tabla:

Diferencia de cuadrados	Raíz cuadrada del minuendo	Raíz cuadrada del sustraendo	Factorización
$x^2 - 81$			
$y^2 - \frac{1}{4}$			
$9x^2 - 1$			
$64a^2 - \frac{1}{9}$			
$100x^2-100$			

4. Factoriza los siguientes trinomios cuadrados perfectos:

a. $\frac{4}{9}a^2+\frac{4}{12}ab+\frac{1}{16}b^2 =$

b. $81m^4 - 54m^2n^2 + 9n^4 =$

c. $36a^2b^2 + 24abc + 4c^2 =$

d. $\frac{1}{4}x^6 - \frac{4}{10}x^3y^2 + \frac{4}{25}y^4 =$

5. Desarrolla los binomios dados a continuación:

a. $(3ab - 1)^2 =$

b. $(5x^2 - 3xy^3)^2 =$

c. $(\frac{1}{2}x - 2y)^2 = (\frac{1}{2}x)^2 + 2\,(\frac{1}{2}x)\,(-2y) + (-2y)^2 =$

d. $(9 - 2ab)^2 =$

6. Escribe en el cuadro el signo igual (=) o el signo diferente (≠) y justifica tu decisión:

a. $\frac{7abc}{9mn} \;\boxed{}\; \frac{4abc}{9mn}$, porque

b. $\frac{6zw}{8xy} \;\boxed{}\; \frac{3zw}{8xy}$, porque

c. $\frac{5a^2b}{6wx} \;\boxed{}\; \frac{20a^2b}{24wx}$, porque

7. Simplifica hasta su mínima expresión:

a. $\frac{36mn}{80xyz}$

b. $\frac{4x^2 - 16y^2}{10x - 20y}$

c. $\frac{20a^3b}{28a^2}$

d. $\frac{5(x - 2)}{(x - 2)^2}$

8. Encuentra el resultado de:

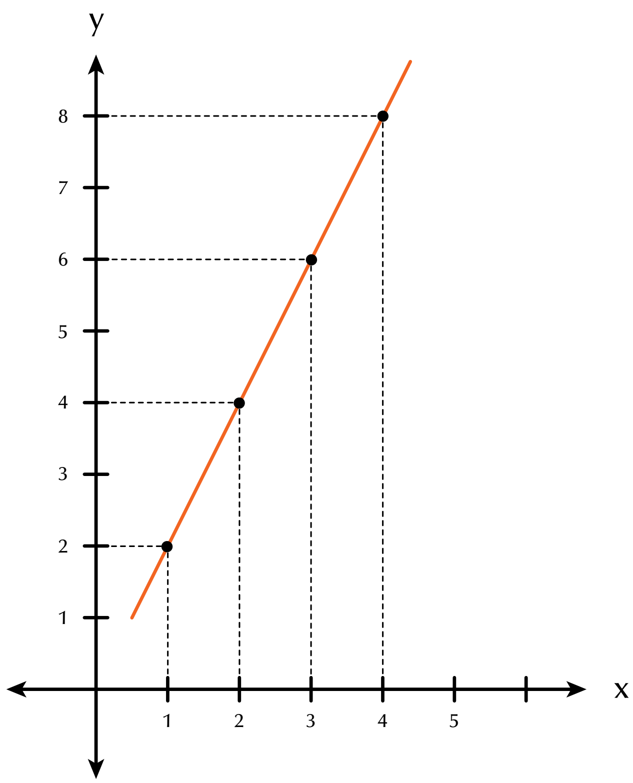
a. $\left[\frac{2}{3}x^3y\right] \cdot \left[\frac{4}{5}xyw\right]$

b. $\left[\frac{5x}{3a}\right] \cdot \left[\frac{8a}{7x}\right]$

c. $\left[\frac{15a^2b}{7m^2x^2}\right] \cdot \left[\frac{21mx}{20ab}\right]$

d. $\left[\frac{4x^2 - 2x \quad 6}{x^2 - 5x + 6}\right] \cdot \left[\frac{x^2 \quad 4}{2x + 2}\right]$

9. Observa la gráfica y responde las preguntas:



a. ¿Cuál es el valor de y cuando x = 1?
b. ¿Qué valor adquiere y cuando x = 2?
c. ¿Qué valor le corresponde a y cuando x = 3?
d. ¿Cuando x = 4, cuál es el valor de y?
e. Escribe las coordenadas que resultan con esos valores: (1, ?), (2, ?), (3, ?) y (4, ?).
f. ¿Cuáles son los valores que toma la variable independiente?
g. ¿Cuáles los valores de la variable dependiente?
h. ¿Cuál es la función que determina esa gráfica?

10. Un granjero sabe que en promedio 1 de sus vacas consume 23 kilos de concentrado al día. Llama x al número de vacas que tiene el granjero y llama y al número de kilos de concentrado que consumen.

a. Realiza una tabla mostrando el consumo de 1, 2, 4, 5 y 7 vacas.

x Número de vacas	y Kilos consumidos de concentrados
1	23
2	
4	
5	
7	

b. Haz la representación de la situación, en el plano cartesiano.

Heteroevaluación “Le cuento a mi profesor”. Rejilla de rúbricas:

Con tu profesor, resuelve la siguiente rejilla.
Lee el enunciado y señala con una x la categoría correspondiente, según lo que has aprendido.

Qué sé hacer	Superior	Alto	Básico	Bajo
Simplifico fracciones algebraicas				
Resuelvo ejercicios que requieran suma de polinomios				
Resuelvo ejercicios que requieran multiplicación de polinomios				
Resuelvo ejercicios que requieran división de polinomios				
Represento gráficamente una función				
Calculo el valor numérico de una expresión algebraica				
Resuelvo ejercicios con productos notables				
Resuelvo ejercicios con cocientes notables				
Factorizo expresiones algebraicas				
Trazo en el plano cartesiano funciones algebraicas				

Autoevaluación

Participo y aprendo	Superior	Alto	Básico	Bajo
Permito que mis compañeros participen en los trabajos				
Aplaudo las actitudes creativas que inviten a buscar nuevas soluciones a situaciones problemáticas				
Participo activamente en los grupos de trabajo				
Ayudo en la aclaración de dudas a mis compañeros				
Fomento la disciplina en el grupo				
Participo de manera activa en clase, formulando o respondiendo preguntas				
Propongo problemas o actividades para resolver en clase				
Repaso en casa lo suficiente, sobre lo aprendido en el colegio				