

# Sistemas de datos

## Resolvamos

La ciencia se ocupa en general de fenómenos observables. La ciencia se desarrolla observando hechos, formulando leyes que los explican y realizando experimentos para validar o rechazar dichas leyes.

Los modelos que crea la ciencia son de tipo determinista o aleatorio.

La Estadística se utiliza como tecnología al servicio de las ciencias donde la variabilidad y la incertidumbre forman parte de su naturaleza.

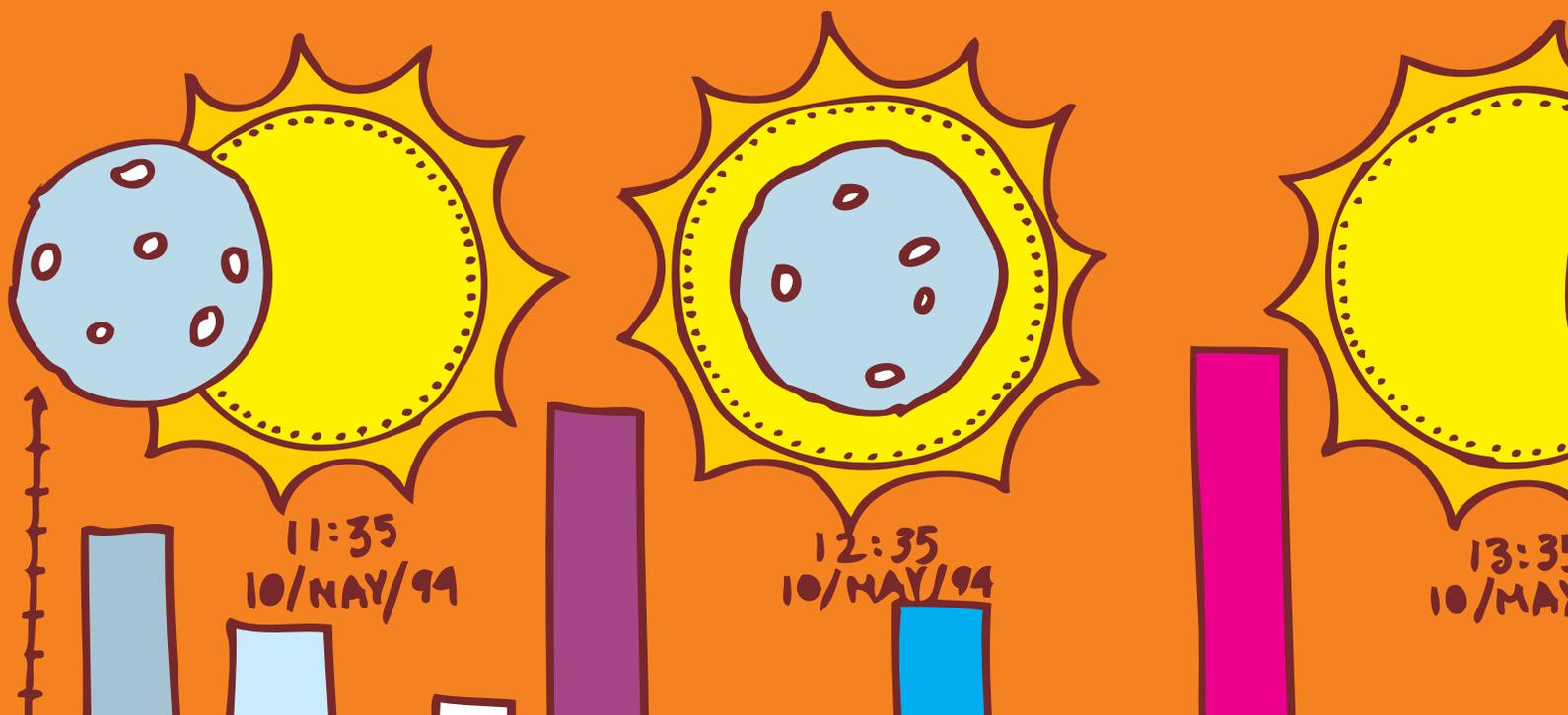
*“La Bioestadística enseña y ayuda a investigar en todas las áreas de las ciencias de la Vida donde la variabilidad no es la excepción sino la regla”*

*Carrasco de la Peña (1982)*

Tomado de: <http://www.bioingenieria.edu.ar/academica/catedras/introprob/unidad-8.pdf>

Según lo escrito en el recuadro superior es de esperar que la Estadística sea una herramienta indispensable en todo proyecto y estudio científico.

Los periódicos y revistas nos llegan llenos de gráficas estadísticas, especialmente en las noticias económicas, mostrándonos el comportamiento del dólar, del precio de la gasolina o del petróleo.



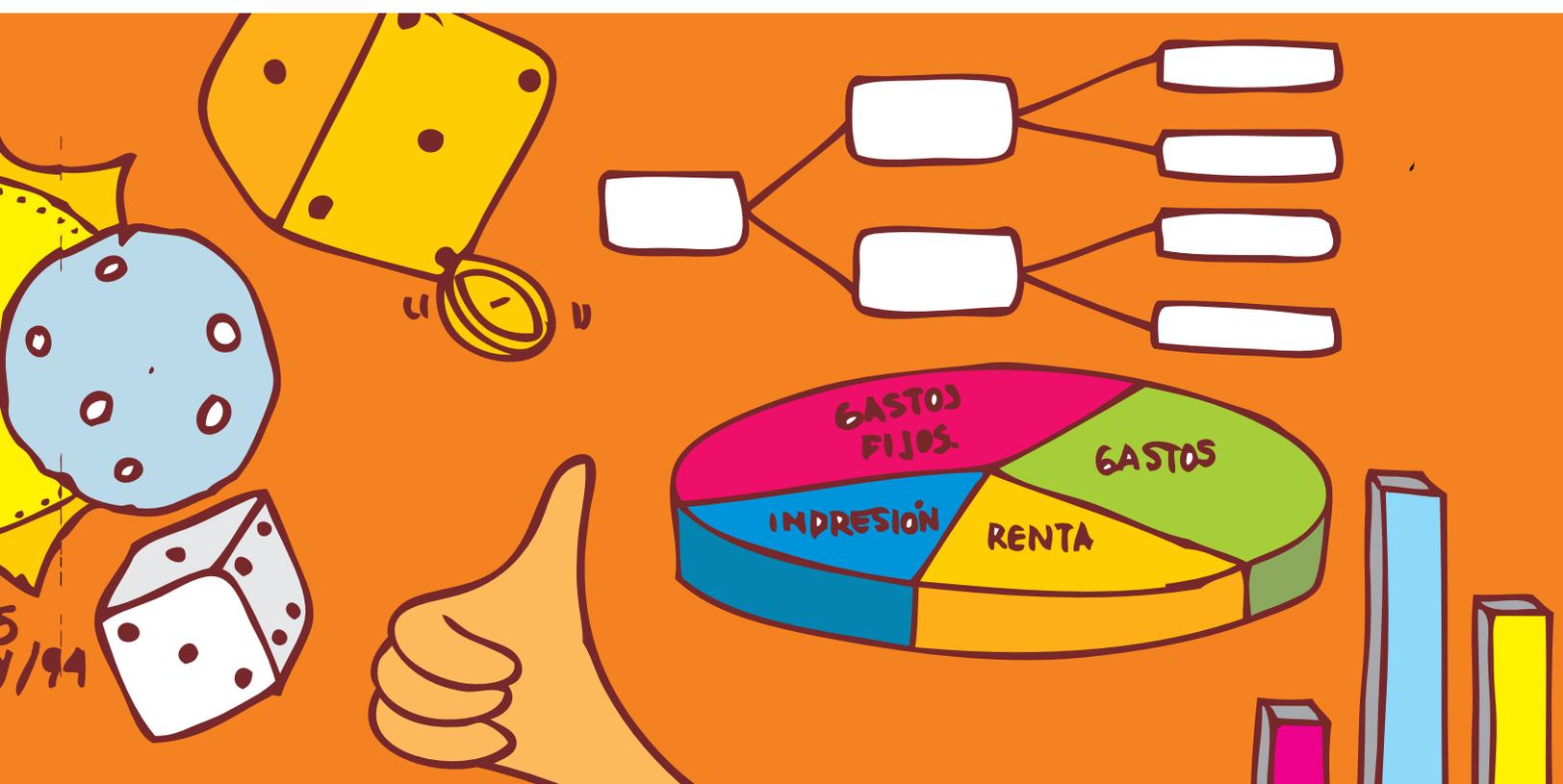
En la vida cotidiana, a veces nos hacen preguntas que involucran ideas estadísticas, así sea de manera sencilla.

Para responder con habilidad a estas preguntas es necesario solicitar y manejar adecuadamente una serie de datos directamente relacionados con la pregunta que se investiga. ¿Lo has realizado alguna vez?

Por ejemplo:

- ¿Con qué frecuencia llueve en la población en donde tu vives?
- ¿Qué es más frecuente, el nacimiento de niños o el de niñas?
- ¿Qué actividad realizas con mayor frecuencia?

Referentes de calidad	Capítulos
<b>Estándares</b>	1. Términos básicos, tabulación, representaciones gráficas y Medidas de centralización.
Comparo e interpreto datos provenientes de diversas fuentes (prensa, revistas, televisión, experimentos, consultas, entrevistas).	
Resuelvo y formulo problemas a partir de un conjunto de datos presentados en tablas, pictogramas, diagramas de barras e histogramas.	
Reconozco la relación entre un conjunto de datos y su representación.	
Uso medidas de tendencia central (media, mediana, moda) para interpretar comportamiento de un conjunto de datos.	



# Términos básicos, tabulación, representaciones gráficas y Medidas de centralización

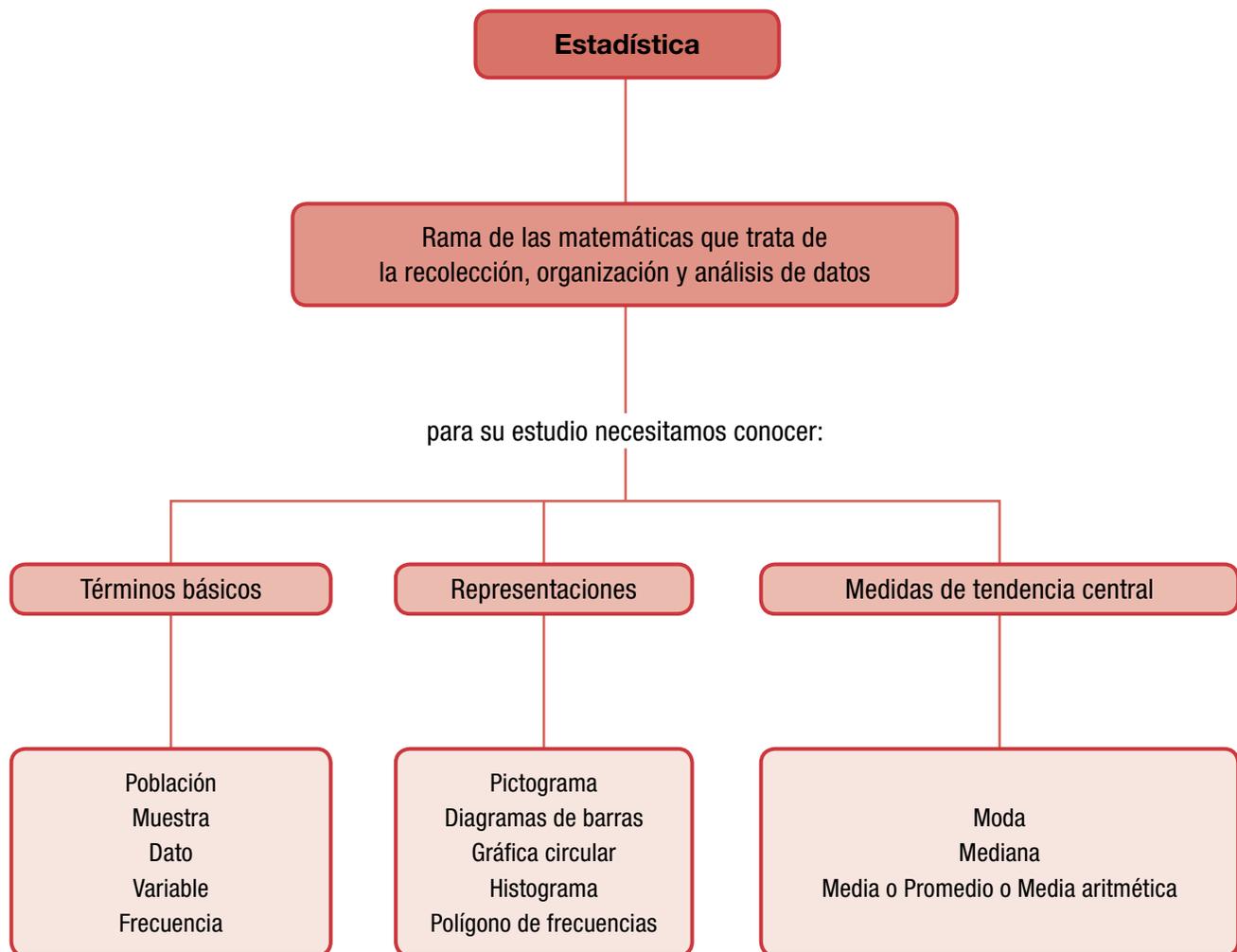
Las actividades que día a día realizan los habitantes de una comunidad o sociedad se llevan en registros (anotaciones), son ejemplos de éstos los nacimientos, las defunciones, los casamientos, etcétera.

El conteo y medición de tales hechos genera una gran cantidad de información que hace necesario ordenarla, clasificarla y analizarla para saber qué dicen de su comportamiento en un período de tiempo.

Las instituciones correspondientes dan a conocer esta información por medio de tablas y gráficas para que la población tenga conocimiento de cuál ha sido su desarrollo.

Esto hace resaltar la importancia del manejo y tratamiento de la información.

¿Te has detenido, alguna vez a pensar en cuáles actividades de la vida cotidiana hay necesidad de utilizar la estadística?



# Tema 1.

## Términos básicos de la estadística



**Indagación**  
¿Preguntémonos qué estudia la Estadística?

Ya desde cursos anteriores has tenido contacto con la estadística en tu asignatura de Matemáticas.

Para estudiar una situación científica o social, debemos obtener información y lo primero que debemos determinar es dónde y cómo recogerla. La recolección de información podemos realizarla mediante preguntas o encuestas.

Averígualo a cada uno de tus compañeros de curso cuál es su deporte favorito.

En tu cuaderno anota las respuestas que tus compañeros te suministren.



Observa los datos obtenidos, cuenta los votos de cada deporte y responde:

- ¿Cuál es el deporte que obtuvo más votos?
- ¿Cuál deporte obtuvo menos votos?



**Conceptualización**

¿Sabes con qué finalidad se da “muestra gratis” de algún producto que se vende?

Generalmente, el propósito es dar a conocer la calidad de ese producto ya que la muestra presenta sus características principales.

### Población y muestra



Supongamos que en la cuadra de una calle hay 10 familias y que un entrevistador, debe elegir al azar (a la suerte), a tres de ellas. ¿Cómo decidirías a cuáles familias entrevistar?

Un método que se podría utilizar es el uso de una urna, escribir en tarjetas el número de las casas en donde habitan las familias, doblarlas, ponerlas en la urna o caja y proceder a extraer 3 de ellas, sin volverlas a colocar dentro de la urna.

Esta sería la manera de asegurar que las familias entrevistadas sean diferentes y seleccionadas al azar (a la suerte). En este caso, las 100 familias son la población y las 3 familias elegidas al azar conforman la muestra.

Para poder sacar conclusiones confiables sobre una población, se debe estar seguro de que la muestra elegida ha sido tomada adecuadamente (sin preferencias) y representa la población en la que se está interesado.

Ahora bien, en la práctica se usa la letra  $n$  minúscula para representar la medida de la muestra y  $N$  mayúscula para representar el número de la medida de la población.

Así en el caso de la entrevista a las familias tenemos que:

$$N = 100 \text{ (población)}$$

$$n = 3 \text{ (muestra)}$$

A continuación se analizan algunas situaciones que van a ayudar a identificar los términos básicos de la estadística.



1. En un laboratorio se tomó una muestra a 50 pacientes y se observó que 30 de ellos tenían amibas. ¿Cuántos pacientes podrían tener amibas en una población de 1,500 personas que se someten a un análisis de laboratorio?

**Solución**

Identifiquemos términos importantes:

$$\text{Población: } N = 1,500$$

$$\text{Muestra: } n = 50$$

$$\text{Pacientes con amibas} = 30 \text{ de } 50$$

Estableciendo la proporción tenemos:

De 50 pacientes, 30 tienen amibas, de 1,500 pacientes ¿cuántos tendrán?

$$\frac{50}{30} = \frac{1500}{\square}$$

Y aplicando la ley fundamental de las proporciones, se tiene:

$$= \frac{1500 \times 30}{50} = 900$$

Por lo tanto, se puede deducir que probablemente haya 900 pacientes que tengan amibas.

2. En una fábrica de llantas se tomó una muestra a 75 llantas de una producción de 2,000; si se encontraron 3 defectuosas, ¿cuántas llantas defectuosas podrían hallarse en toda la producción?

Veamos:



$$N = 2,000$$

$$n = 75$$

$$\text{Defectuosas} = 3$$

Estableciendo la proporción se tiene:

$$\frac{75}{3} = \frac{2,000}{\boxed{\phantom{000}}}$$

$$\boxed{\phantom{000}} = \frac{2,000 \times 3}{75} = 80$$

Por lo tanto, se puede inferir (deducir) que probablemente haya 80 llantas defectuosas en toda la producción.

El hacer estudios estadísticos sobre una parte de la población tomada a la suerte, se llama “muestreo” y tiene algunas ventajas tales como: el bajo costo, el ahorro de tiempo, la facilidad para realizar la investigación y el análisis de resultados.

Para recoger la información que necesitas recopilar, nos valemos de formatos o formularios que en estadística se les llama “instrumentos”. Y pueden ser:

### Encuestas y censos

La encuesta es la captación (obtención), de hechos, opiniones, juicios y motivaciones sociales, de una manera conscientemente, planeada y registrada en cuestionarios.

Los datos se consiguen a través de la respuesta oral o escrita a una serie de preguntas formuladas a un determinado círculo de personas.



Las encuestas tienen como objetivo obtener información de importancia para la planeación nacional en rublos (valores, datos) tales como: producción agrícola y uso de la tierra, desempleo y tamaño de la fuerza de trabajo, producción nacional, precios de mayoreo y menudeo, condiciones de salud del pueblo, ingresos y gastos.

### Censos



La boleta censal es un formulario integrado con los datos más importantes de los miembros de un grupo, por ejemplo: nombre, edad, sexo, estado civil, nacionalidad, lugar de nacimiento, idioma, características económicas, educativas, religiosas, etc.

Se usa en el estudio de cómo se presenta un fenómeno dado en la población de un país, una fábrica, una escuela, etc.

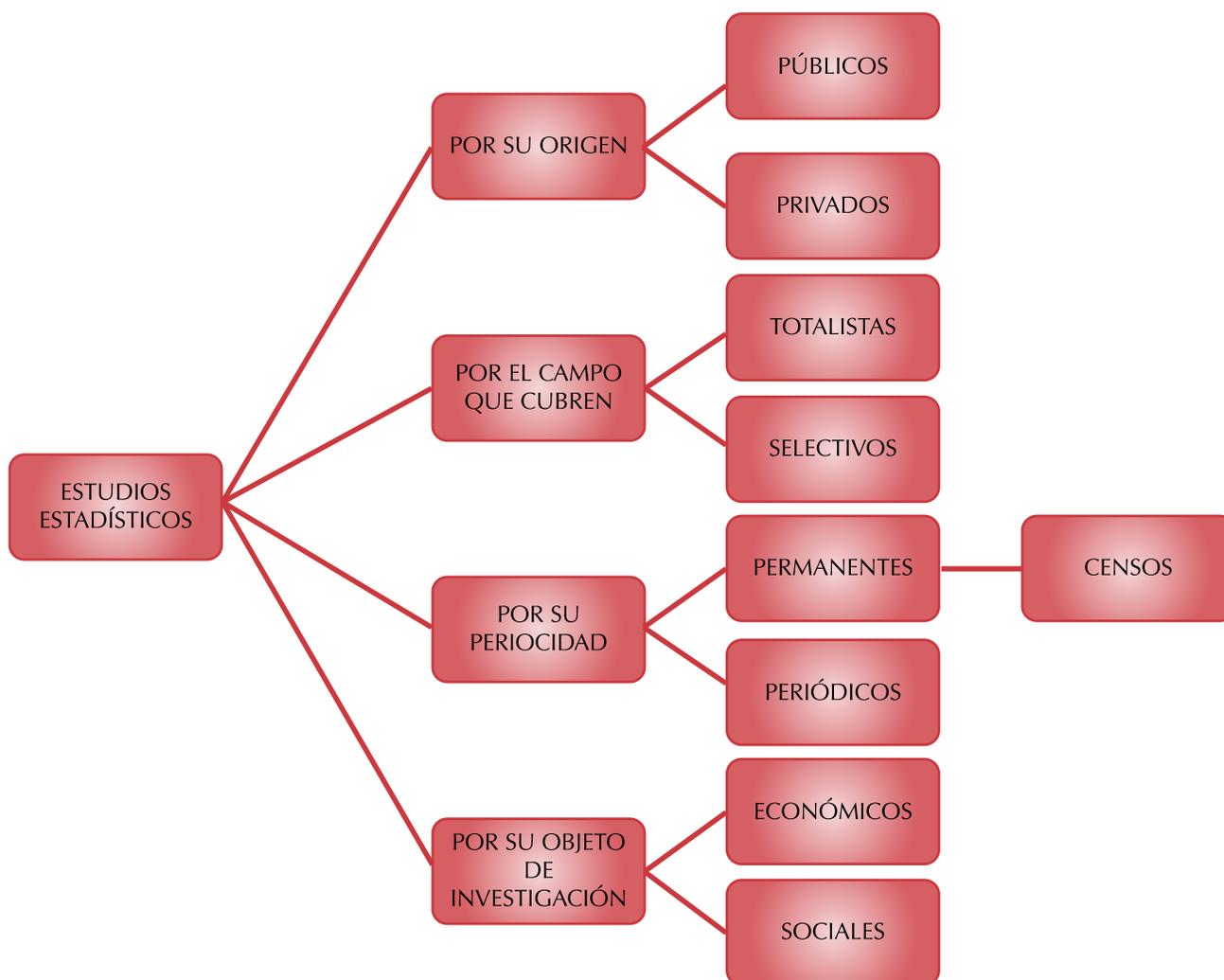
Los censos dan un conocimiento, medianamente exacto, de la extensión y la densidad, la composición religiosa, económica, educativa, el porcentaje de nacimientos, defunciones y matrimonios, las esperanzas de vida y otras características de una población.

También proporcionan un conocimiento de los cambios cuantitativos que sufrió, en el curso del tiempo, una población en cada uno de los aspectos anteriores, los cuales ya habrían sido estudiados en censos previos.

### Estudios estadísticos

¿Cómo podemos realizar un estudio estadístico?

En la actualidad, se ha hecho familiar el empleo de técnicas estadísticas para el estudio de los problemas sociales; de tal forma que se han clasificado como se muestra a continuación:



Estudia detenidamente el cuadro anterior y coméntalo con algunos compañeros.

En Colombia, la entidad que se encarga de la recopilación, organización y análisis los datos relacionados con los aspectos económicos y sociales en general (Educación, costo de vida, natalidad y mortalidad, etc.) es el Departamento Nacional de Estadística, conocido como DANE.

La información del DANE está al servicio del público en general. Quien necesite o quiera conocer algún dato de Colombia puede consultar a través de los medios siguientes: Banco de datos, telefónicamente, página WEB, [www.dane.gov.co](http://www.dane.gov.co), correo tradicional, correo electrónico, fax, suscripciones a boletines y publicaciones.

### Tabulación de datos

Estudiamos el caso siguiente en el que se muestra la organización de los datos.

En una fábrica de motocicletas se obtuvo la siguiente producción durante los 25 días de trabajo de un mes. Cuando se recolecta determinada información, lo primero que se hace es organizar los datos y elaborar una tabla.

140	152	146	140	160
155	149	152	148	147
150	141	146	152	157
148	155	152	160	148
160	140	152	148	155

Como se puede apreciar, los datos están en desorden.

Para facilitar su estudio, es conveniente ordenarlos en forma decreciente (de mayor a menor), como se ve a continuación:

160	155	152	148	146
160	155	152	148	141
160	152	150	148	140
157	152	149	147	140
155	152	148	146	140

En muchas actividades del género humano se requiere realizar encuestas o recopilar datos para posteriormente organizarlos y efectuar el análisis de la información obtenida.

El análisis de los datos sirve para: saber con qué se cuenta y qué hace falta.

En general, para evaluar los procesos, mejorar las áreas donde se detecten errores, elevar las condiciones de vida de la población y en general, tomar decisiones.

### Tabulación

Para facilitar la observación del comportamiento de los datos, éstos se presentan de forma ordenada en una tabla, en donde se registra el número de veces que se repite un dato, mediante una “rayita”.

En esta nueva tabla, cada dato se escribe una sola vez y cuando aparezca de nuevo, solamente se marca la rayita.

Para contar rápidamente, se acostumbra marcar hasta 4 veces con rayitas verticales y la quinta hacerla atravesada, haciendo así montones de cinco.

Al registro de este conteo se le llama tabulación. A continuación se presenta la tabulación de algunos casos:

1. Realicemos la tabulación en el caso de la fabricación de las motos:

Producción de motocicletas	Conteo
160	
157	
155	
152	—   —
150	
149	
148	
147	
146	
141	
140	

Una vez que ya están ordenados los datos, es más fácil observar que la mayor producción es 160 (número mayor) y la menor es 140 (número menor), y que la variación (diferencia entre ellos) es de 20, esto es,  $160 - 140 = 20$ .

A la diferencia entre los datos mayor y menor se le llama técnicamente **oscilación o rango (R)**.

$$R = 160 - 140 = 20$$

Podemos decir, entonces, que la producción durante ese mes oscila o varía entre 160 y 140 motocicletas.

Esta y otras observaciones que se realicen en la tabla pueden aprovecharse para mejorar el proceso de producción de la motos.

2. La Secretaría de Educación de un municipio colombiano investigó cuántos iletrados (personas que no saben leer ni escribir) había en 30 veredas, los datos obtenidos fueron los siguientes:

7	8	7	8	7	7
6	9	8	7	7	8
7	7	8	9	8	8
7	8	9	7	7	10
7	10	7	10	7	7

Al ordenarlos en forma decreciente (de menor a mayor, se tuvo:

10	8	7
10	8	7
10	8	7
9	8	7
9	7	7
9	7	7
8	7	7
8	7	7
8	7	7
8	7	6

### Tabulación

Iletrados por vereda	Conteo
10	I
9	I
8	—III—
7	—III III—
6	I
<b>Total</b>	<b>30</b>

En la tabla de tabulación se observa que el mayor número de iletrados en las veredas estudiadas es de 10 y el menor, 6; así que la oscilación o rango es:

$R = 10 - 6 = 4$ , porque el número de iletrados varía entre 10 y 6.

Del análisis de los datos organizados y registrados en la tabla se pueden desprender decisiones importantes para continuar en la lucha por acabar con este problema en las veredas investigadas.

Por tanto, se concluye que:

***La organización de datos y su tabulación resultan útiles en el proceso de presentación, análisis y tratamiento de la información.***

### Frecuencias

#### Frecuencias absolutas simples

En los grandes centros de población es muy común que haya una mayor afluencia de vehículos circulando a determinadas horas, llamadas horas pico y en ciertas vías o avenidas.

La recopilación de esos datos, su agrupación, conteo y registro en tablas sirve a las autoridades para decidir cuáles medidas se deben tomar en cuanto al sentido de las calles, colocación de semáforos, puentes peatonales, vigilancia, etc., para evitar grandes congestiones de vehículos, así como pérdida de tiempo y molestias a quienes transiten por la ciudad.

Analicemos el siguiente estudio en el que aparecen los datos que se obtuvieron contando el número de vehículos que cruzan cierta calle cada cinco minutos.

28	32	24	26	23	23	30	25
34	30	32	25	25	20	25	37
39	34	36	28	24	26	26	24
24	20	22	28	29	26	27	27
26	31	33	31	28	38	28	27

Al ordenar los datos en forma decreciente (de mayor a menor) y registrar el conteo en una tabla se obtiene la tabulación:

**Tabulación**

Vehículos	Conteo
39	
38	
37	
36	
34	
33	
32	
31	
30	
29	
28	
27	
26	
25	
24	
23	
22	
20	
<b>Total</b>	<b>40</b>

Realizado el conteo, se agrega, a la tabla, una columna que indica el número de rayitas de cada dato o marca. A esta nueva columna se conoce con el nombre de frecuencia absoluta o frecuencia absoluta simple.

Vehículos	Conteo	Frecuencia absoluta $f_i$
39		1
38		1
37		1
36		1
34		2
33		1
32		2
31		2
30		2
29		1
28		5
27		3
26		5
25		4
24		4
23		2
22		1
20		2
<b>Total</b>	<b>40</b>	<b>40</b>

Así observamos que por ejemplo, el dato 28 está 5 veces en el conjunto de datos, por lo tanto, en la columna de conteo aparecen 5 rayitas frente al 28 y en la columna de frecuencia absoluta se ha escrito el número 5.

Considerando todo lo anterior, se aprecia que:

**La frecuencia absoluta simple ( $f_i$ ) de un dato estadístico, es el número de veces que aparece en un conjunto de datos, llamado también distribución de datos.**

**Frecuencias absolutas acumuladas**

Con el caso anterior de los vehículos, hemos realizado el conteo y la tabulación de las frecuencias absolutas simples.

Ahora, veamos que es posible ir acumulando las frecuencias sumando cada una con sus anteriores.

Vehículos	Conteo	Frecuencia absoluta $f_i$	Frecuencia absoluta acumulada $F_i$
39		1	(no tiene anterior) 1
38		1	(1+su anterior = 1+1) 2
37		1	(1+sus anteriores = 1+1+1) 3
36		1	(1+sus anteriores = 1+1+1+1) 4
34		2	(2+sus anteriores = 2+1+1+1) 6
33		1	7
32		2	9
31		2	11
30		2	13
29		1	14
28		5	19
27		3	22
26		5	27
25		4	31
24		4	35
23		2	37
22		1	38
20		2	40
<b>Total</b>	<b>40</b>	<b>40</b>	

Observa que la columna de las frecuencias acumuladas no se totaliza puesto que la última frecuencia simple, sumada con las anteriores, da el total de elementos del conjunto ordenado.

### Gráficas estadísticas

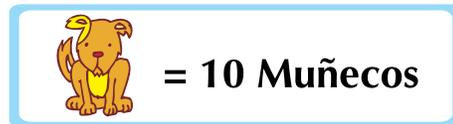
Una vez recogida la información y habiendo tabulado los resultados, en su tabla de frecuencias, es muy conveniente poder plasmarlos en gráficas, que nos permiten una mejor visualización y facilidad para interpretarlos, de tal modo que pueda llegarse a una correcta toma de decisiones.

#### 1. Pictogramas

Estudiemos la situación de un taller que produce muñecos de felpa o peluches.

Un taller que fabrica muñecos de peluche, quiere informar la cuenta de sus piezas producidas en los últimos cuatro meses. Para ello se vale de un pictograma así.

1 perrito representa 10 muñecos de peluche.



Observa cuál fue la producción alcanzada (número de peluches fabricados) en cada mes, según el cuadro adjunto.

Meses	Perritos	Nº Peluches
1º mes		30
2º mes		40
3º mes		15
4º mes		20

En los pictogramas, los valores representados a través de un dibujo, tienen un valor determinado o previamente asignado o acordado.

Este tipo de gráfica es fácil de elaborar e interpretar y, por esta razón, se emplea cuando las personas a quienes se dirige no tienen conocimientos de estadística.

#### 2. Gráfica de barras

Para construir una gráfica de barras, analicemos la situación siguiente:

El orientador de una escuela secundaria realizó una encuesta para conocer las preferencias de los estudiantes en relación con las asignaturas que cursan.

Asignatura	
Matemáticas	(M)
Español	(E)
Civismo	(C)
Historia	(H)
Geografía	(G)
Biología	(B)
Inglés	(I)

Los datos obtenidos son los siguientes:

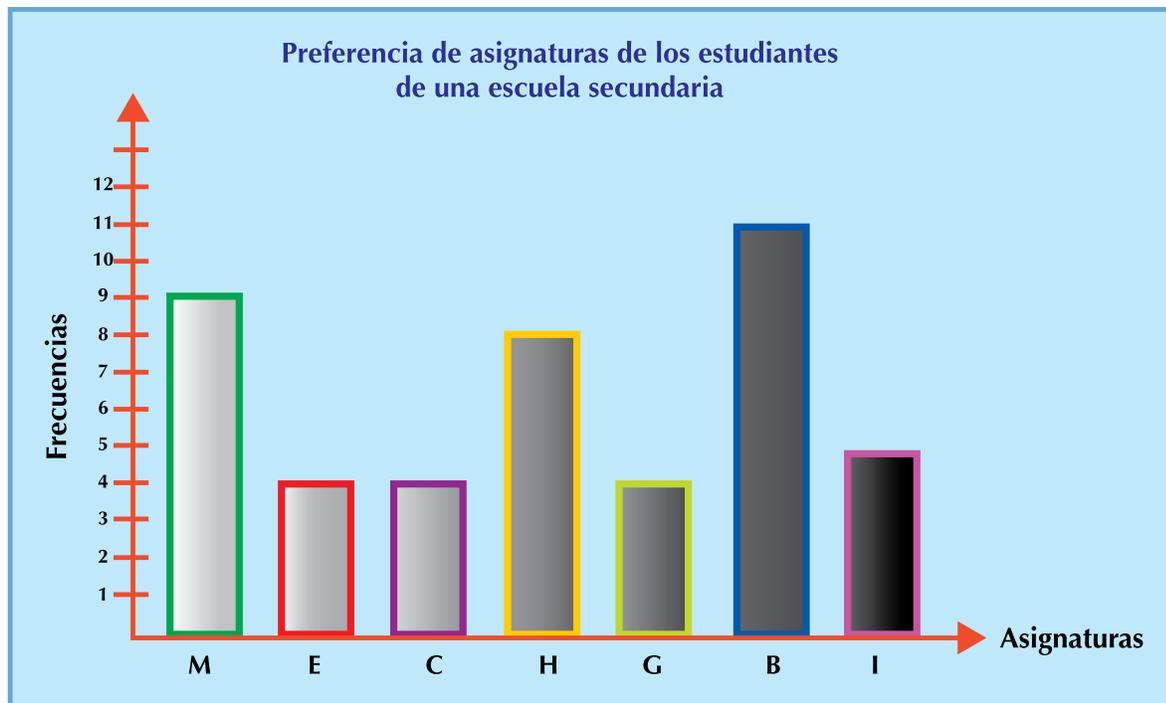
M,	B,	I,	M,	M,	B,	B,	B,	B,
B,	M,	I,	H,	H,	C,	I,	G,	E,
B,	G,	G,	H,	H,	C,	C,	E,	E,
B,	H,	B,	M,	I,	H,	B,	G,	E,
B,	M,	I,	H,	H,	M,	M,	C,	M.

El orientador de la escuela, organiza los datos en una tabla de frecuencias, así:

- Se trazan dos ejes perpendiculares.
- Se escribe una escala de valores o *frecuencias* sobre el eje vertical (↑), y los *datos* sobre en el eje horizontal (→).

Asignaturas		
Matemáticas	(M)	9
Español	(E)	4
Civismo	(C)	4
Historia	(H)	8
Geografía	(G)	4
Biología	(B)	11
Inglés	(I)	5
<b>Total</b>		<b>45</b>

Se trazan rectángulos o barras del mismo ancho sobre el eje horizontal, dejando un mismo espacio entre ellos. La longitud de cada barra representa el número de frecuencias, como muestra la gráfica siguiente:



### 3. Histograma

El orientador puede representar el resultado de sus averiguaciones en una gráfica, en el plano cartesiano, pero sin dejar espacio entre las barras.

Una gráfica cartesiana de barras pegadas recibe el nombre de histograma y se construye tomando el eje horizontal o eje de las X, del plano cartesiano para la variable o datos y el eje vertical o eje de las Y para las frecuencias.

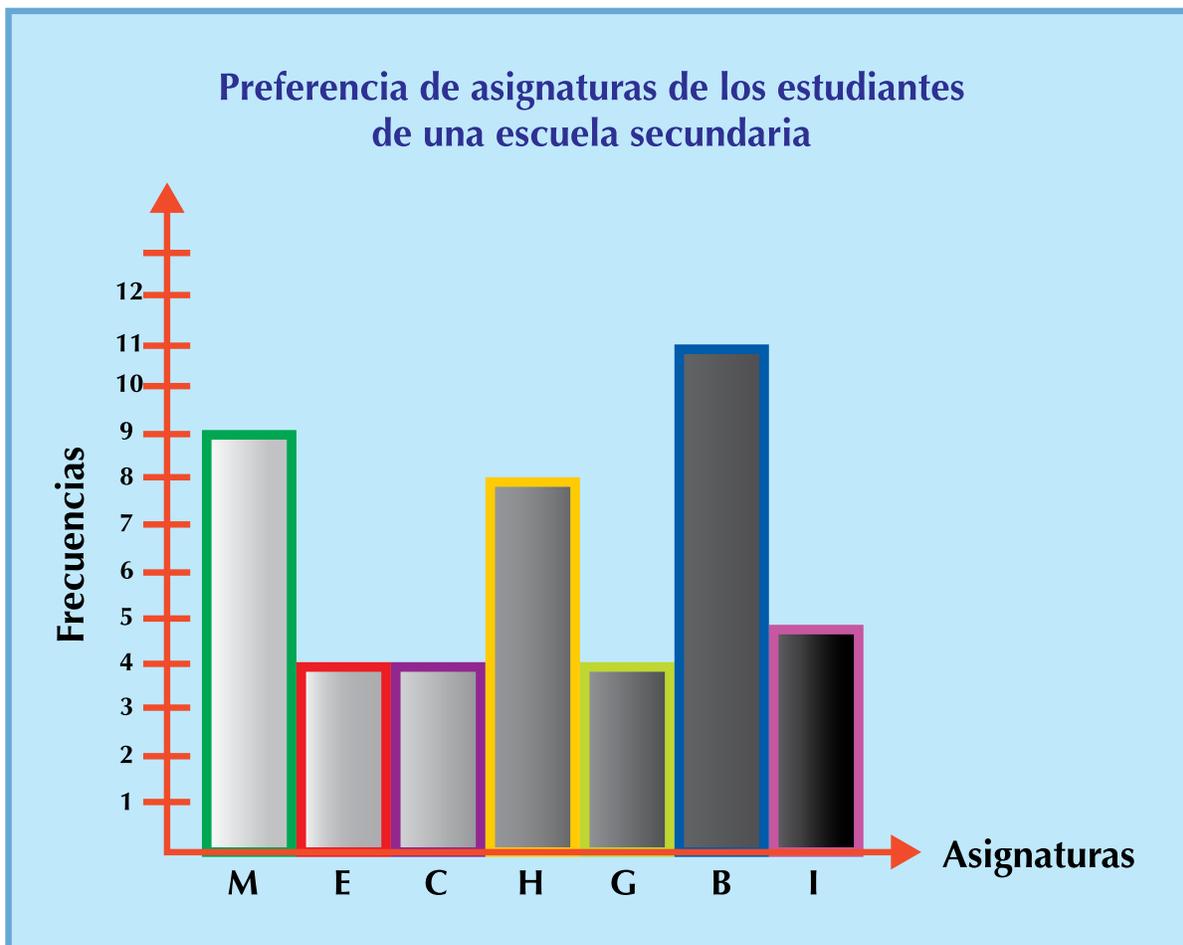
Los histogramas pueden utilizarse para mostrar el comportamiento tanto de datos agrupados, es decir por intervalos, como para datos no agrupados, es decir, datos registrados de manera individual.

El orientador del colegio presentó su informe en un histograma así:

Nótese que las bases de los rectángulos son iguales, es decir, tienen el mismo ancho porque la amplitud es la misma y, además, los rectángulos quedan contiguos. A esta gráfica se le llama **histograma**, porque se usan rectángulos cuyas áreas son proporcionales a las frecuencias, esto es, teniendo la base igual, a mayor frecuencia mayor altura del rectángulo y a menor frecuencia corresponde rectángulo de altura menor.

Recuerda que:

**Un histograma se construye por medio de rectángulos unidos, cuyas bases indican el nombre de la variable (datos) y cuyas alturas indican las frecuencias absolutas o número de veces de cada dato.**



Tanto en el diagrama de barras como en el histograma, el orientador de la escuela puede encontrar información como:

- ¿Cuál es la asignatura preferida por los estudiantes?
- ¿Cuál es la asignatura que menos gusta a los estudiantes?
- Discútelos con tus compañeros.

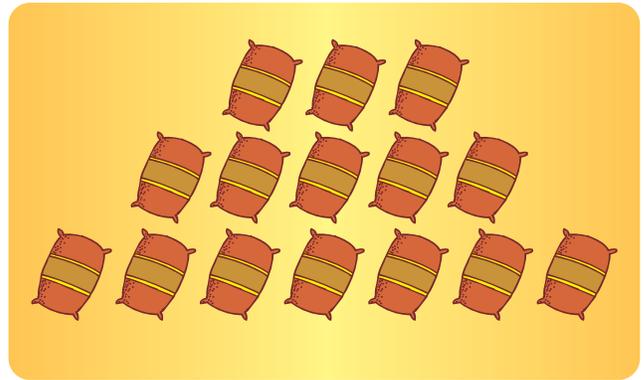


### Aplicación

Copia los ejercicios en tu cuaderno, resuélvelos y compara tus resultados con los de tus compañeros.

1. En un depósito de bultos de café se escogió un dibujo o ícono  para representar la entrada de 12 bultos. Los conteos que se registraron así: Sabiendo que:  = 12 bultos

- a. ¿Cuántos bultos entraron al depósito?
- b. Inventa una forma de registrar el conteo de algún producto de tu vereda, utilizando un dibujo o ícono.
- c. ¿Conoces algún nombre para ese tipo de representación?
- d. Comparte tu experiencia con algunos compañeros.



2. Si para representar las ventas de televisores de un centro comercial se usa un pictograma en el cual el ícono o dibujo escogido es  y representa una venta de 10 televisores. ¿Cuántos televisores muestra que se vendieron en mayo, representados en la fila siguiente?

Mayo 

3. El señor Martínez tiene una huerta en la que hay manzanos. Para hacer un estudio de la producción de los cuatro años anteriores, cuenta con los siguientes datos.

1997 - 8,500 manzanas  
 1998 - 11,000 manzanas  
 1999 - 7,250 manzanas  
 2000 - 10,500 manzanas

Elabora un pictograma en el que:

 = 500 manzanas

Revisa tu gráfica con otros compañeros, si encuentras diferencias, discútanlas.

4. El comité de la cooperativa escolar analiza las ganancias mensuales del pasado año, que a continuación se presentan:

Febrero	\$ 10,000
Marzo	\$ 15,000
Abril	\$ 12,000
Mayo	\$ 17,000
Junio	\$ 9,000
Agosto	\$ 10,000
Septiembre	\$ 14,000
Octubre	\$ 11,000

- Elabora un pictograma escogiendo un dibujo que represente \$2,000 de ganancia.
- Ordena los meses de menor a mayor, según su ganancia obtenida.
- Calcula el rango de ganancias.

5. Dado el conjunto de datos con un diagrama de barras.

16, 10, 18, 12, 17, 10, 17, 22, 13, 21,  
16, 11, 23, 17, 15, 20, 11, 13, 21, 15,  
23, 20, 15, 21, 22.

- Ordena el conjunto de manera ascendente, es decir de menor a mayor.
- Calcula el rango de los valores del conjunto.
- Representa el conjunto en un diagrama de barras.
- Construye un histograma que muestre el conjunto.

6. Un alumno de primer año de secundaria es de los más pequeños de su grupo que tiene por 30 alumnos y desea investigar la altura de sus compañeros para situarse con precisión entre ellos.

Así, mide las estaturas en centímetros de sus compañeros integrantes del grupo y obtiene los datos:

157, 148, 138, 145, 160, 162, 150, 158, 133, 157,  
153, 149, 151, 152, 143, 145, 138, 159, 146, 147,  
152, 152, 152, 157, 160, 146, 138, 147, 136, 151.



El alumno mide 138 cm y ya incluyó en los datos su altura.

- Ordena todos los datos de menor a mayor.
- Encuentra la oscilación o rango.
- ¿Cuántos alumnos son más altos que él?
- ¿Cuántos son más bajos que él?
- ¿Cuántos miden lo mismo que él?
- ¿Cuál es la estatura que predomina?
- Agrupar las estaturas en 6 intervalos.
- Elabora una tabla con el conteo y las frecuencias absolutas.
- Construye el histograma representativo del grupo de estudiantes.

7. Se quiere fotocopiar un documento que tiene 45 páginas debidamente numeradas.

Si el precio de una fotocopia es de \$30.

- ¿Qué precio se pagará por 2, 4, 6, 7, 9, 11, 14, 18, 21 y 33 copias?
- Ordena los precios de mayor a menor.
- Encuentra el rango u oscilación de los precios.
- Haz la tabla de frecuencias absolutas.
- Elige una gráfica para representar la situación.



## Entendemos por...

**Inferir** sacar conclusiones o deducir de algo.

Por ejemplo: Dada una gráfica, interpretar sacar conclusiones de ella o deducir algo es haber inferido.

## Diversión matemática

### Señales de tránsito

Las señales de tránsito son nuestra guía en las calles y caminos.

Nos indican distancias entre ciudades, curvas, puentes y todo aquello que como conductores necesitamos para informarnos sobre el camino que recorremos.

Garantiza que personas de diversas lenguas y culturas puedan interpretar los mensajes.

Hay tres clases de señales de tránsito:

AMARILLAS Preventivas,  
ROJAS reglamentarias y  
AZULES informativas.

SP-11



Preventivas

Sirven para avisarnos de peligros que vamos a encontrar.

SR-01



Reglamentarias

Nos recuerdan que debemos obedecer.

SI-18



Informativas

Nos indican que un poco adelante se ofrece un servicio.

Cada grupo se distingue por su forma y por sus colores predominantes.

Observa que el color predominante de las señales preventivas es el amarillo, el de las señales reglamentarias es el rojo y el de las señales informativas es el azul.

Tomado de: <http://conduzca.galeon.com/normas.html>

Diviértete clasificando las señales de tránsito que veas por donde andes.

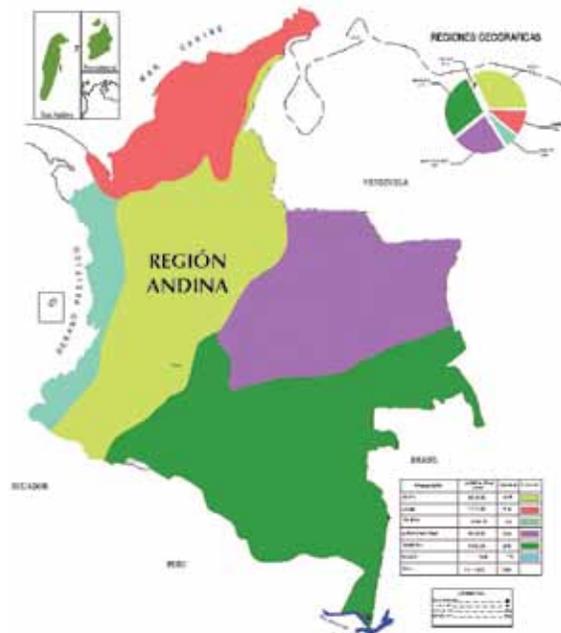
## Día a día

### La Región Andina de Colombia

La Región Andina de Colombia es la zona más poblada del país y la zona económicamente más activa de toda la cordillera de los Andes, con alrededor de 34 millones de habitantes; coincide con la parte septentrional de los Andes. Las poblaciones de cada región del país pueden representarse ya sea con pictogramas, diagramas de barras o histogramas.

Se orienta del suroccidente al nororiente, entre Ecuador y Venezuela.

Dentro del territorio de Colombia se divide en tres cordilleras, Occidental, Central y Oriental, que dan lugar a numerosos valles, cañones, mesetas y un sistema fluvial cuyos principales ríos son el Cauca y el Magdalena.



Tomado de: [http://es.wikipedia.org/wiki/Regi%C3%B3n\\_Andina\\_\(Colombia\)](http://es.wikipedia.org/wiki/Regi%C3%B3n_Andina_(Colombia))

## Tema 2.

# Interpretación de las medidas de centralización



### Indagación

#### La moda

Si vas por una calle, parque o plaza por donde circula mucha gente y observas que un gran número de personas (hombres y mujeres) llevan puesta una prenda azul ya sea pantalón, camisa, falda, blusa, bufanda, etc. ¿Con qué palabras podrías describir este fenómeno?

Indágalo con algunos compañeros(as).

Reúnete con algunos compañeros(as) y hablen en torno a lo que está de moda: en la música, en la ropa, en los juguetes, en las bebidas, etc.

¿Cómo se sabe que algo está de moda?

Tomen nota de las opiniones de todos y saquen una conclusión.



### Conceptualización

Analicemos las situaciones siguientes:

1. Jairo está haciendo una encuesta sobre los gustos de las personas y una de sus preguntas está dirigida a averiguar el tipo de música escuchan con más frecuencia, entre las categorías: Salsa, vallenato, despecho, merengue y boleros.

Entrevistó Jairo a 100 personas y anotó los resultados así:

Tipo de música	Conteo	Frecuencias absolutas
Salsa		23
Vallenato		22
Despecho		20
Merengue		15
Boleros		20

Observando la tabla anterior vemos que la mayor frecuencia corresponde al tipo de música salsa. Entonces diremos que esa es la moda (Mo).

2. Las tablas que se presentan a continuación, muestran las temperaturas registradas en una ciudad de Colombia, el primer día de cada mes, observadas durante un año.

Meses	Temperaturas °C	Meses	Temperaturas °C
Enero	12	Julio	17
Febrero	13	Agosto	16
Marzo	12	Septiembre	16
Abril	12	Octubre	12
Mayo	14	Noviembre	10
Junio	15	Diciembre	11

Temperaturas °C	Conteo	Frecuencias $f_i$
10		1
11		1
12		4
13		1
14		1
15		1
16		2
17		1

La temperatura con mayor frecuencia es 12 °C, lo cual indica que 12 °C es la temperatura moda y se escribe:  $Mo = 12$ .

Definimos la moda (Mo) como el dato que más se repite en un conjunto de datos.

**Moda es el dato que más se repite o marca de mayor frecuencia.**

### Promedio o Media aritmética o Media

Hay conceptos que se aplican comúnmente sin conocerlos a fondo.

Cuántas veces se han escuchado expresiones como:

- a. ¿El promedio más alto del grupo?
- b. ¿El sueldo promedio del colombiano?
- c. ¿El promedio de vida en la actualidad?  
Y, ¿quién conoce la forma de obtener esos promedios?

La mayoría de la gente entiende lo que significan dichas expresiones pero no todos saben cómo se calculan. Así que, a continuación, se verá la forma de obtener el Promedio, Media o Media aritmética, en las situaciones de dos ciudades.

Las temperaturas en grados centígrados, tomadas en dos ciudades A y B, los días primero de cada mes de un determinado año a las 12 del día, son:

	E	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D
A	12	13	12	12	14	15	17	16	16	12	10	11
B	7	7	13	14	15	18	17	18	12	13	10	8

Se desea saber cuál es la temperatura promedio en cada ciudad y cuál es el promedio más alto.

Para obtener el promedio de temperatura de cada ciudad se realiza la suma de sus temperaturas y se divide entre el número de meses del año.

$$A : \frac{12 + 13 + 12 + 12 + 14 + 15 + 17 + 16 + 16 + 12 + 10 + 11}{12} \cong 13.1 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$B : \frac{7 + 7 + 13 + 14 + 15 + 18 + 17 + 18 + 12 + 13 + 10 + 8}{12} \cong 12.66 \text{ } ^\circ\text{C}$$

Las dos medidas son muy parecidas, el promedio en la ciudad A es un poco mayor: 13.1 °C. En la ciudad B el promedio es de 12.66 °C.

El dato presentado anteriormente como promedio se le llama también media aritmética o media.

Esta medida señala el centro de una distribución pero su desventaja es que puede verse afectada de manera considerable por uno o dos valores extremos de toda la muestra.

Esto sucedería por ejemplo, en una ciudad en la cual la mayoría de los meses ofrecen una temperatura similar y en tres meses de intenso verano las temperaturas son elevadas lo que hace que el promedio general suba, lo cual no refleja la realidad del clima de dicha ciudad.

**Para hallar la media aritmética o promedio se suman todos los datos y se divide por el número total de datos.**

### Mediana

Dado un conjunto numérico, es posible ordenarlo ya sea de manera ascendente, es decir, de menor a mayor o descendente, esto es de mayor a menor e identificar el elemento central. A este dato ubicado en el centro del conjunto ordenado se le llama "Mediana" (Me).

Ejemplos:

1. Dado el conjunto formado por los elementos: 4, 6, 3, 7, 3, 5, 6, identificar la mediana.

**Solución**

Lo primero que hacemos es ordenar el conjunto, ya sea ascendentemente o descendentemente.

Después identificamos el dato que está en el centro del conjunto ordenado, así:

$$\underbrace{3, 3, 4, 5, 6, 6, 7}$$

Observa que este conjunto tiene 7 elementos y 7 es un número impar, por lo tanto,  $Me = 5$ .

¿Qué ocurre cuando el número de datos o elementos del conjunto es par?

Por ejemplo, dado el conjunto formado por los elementos o datos: 9, 3, 6, 10, 3, 4, 3, 7, 2, 5, encontrar la mediana (Me).

**Solución**

Primero ordenamos el conjunto de mayor a menor o de menor a mayor y ubicamos el centro.

$$\underbrace{2, 3, 3, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10}$$

Como en el centro no nos queda un solo dato sino dos valores, entonces los promediamos, es decir, los sumamos y los dividimos entre dos.

$$\begin{array}{c} 4.5 \\ \downarrow \\ \underbrace{2, 3, 3, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10} \\ \uparrow \\ \frac{4 + 5}{2} = \frac{9}{2} = 4.5 \end{array}$$

2. Sea el conjunto de datos: 12, 17, 14, 16, 11, 13, 12, 16, 10, 12, 15, 12, calcular la Me.

Como el número de elementos del conjunto o datos es par, pues tiene doce elementos, entonces, la mediana estará determinada por el promedio de los dos valores que ocupan los lugares de en medio:

$$\begin{array}{c} \underbrace{10 \ 11 \ 12 \ 12 \ 12 \ 13} \quad \underbrace{14 \ 15 \ 16 \ 16 \ 17} \\ \frac{12 + 13}{2} = 12.5 \end{array}$$

Los datos del centro de la distribución son 12 y 13, y su promedio es 12.5, por lo que este valor representa la mediana.  $Me = 12.5$ .



**Aplicación**

Copia los próximos ejercicios en tu cuaderno. Trabaja primero individualmente, después compara con algunos compañeros y si hay diferencias, analízalas y saca una conclusión.

- Dados los datos siguientes:  
5, 13, 5, 6, 8, 9, 9, 5, 11, 9, 9, 6, 7, 8, 9, 10, 13
  - Ordénalos.
  - Calcula la media.
  - Identifica la mediana.
  - Encuentra la moda.
- Ordena los datos siguientes:  
5, 76, 6, 5, 4, 4, 8, 8, 10, 11, 9, 9 y calcula:
  - Media =
  - Mediana =
  - Moda =
- Durante 8 días se registraron las presentes temperaturas, en grados centígrados en una ciudad:  
23, 27, 22, 24, 25, 25, 20, 23. Encuentra:
  - Media =
  - Mediana =
  - Moda =

### Entendemos por...

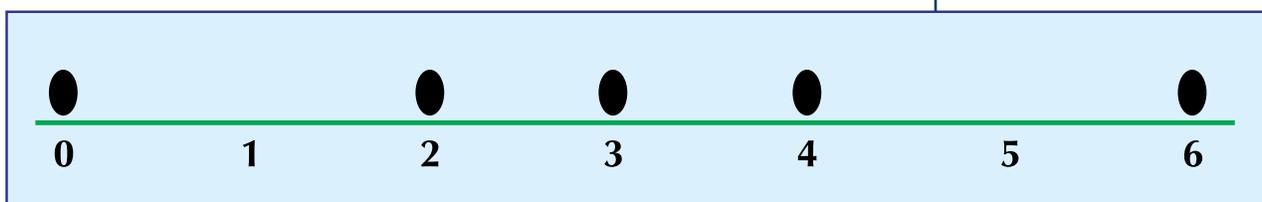
**Cálculo** al cómputo o cuenta que se hace de algo por medio de operaciones matemáticas. Por ejemplo, se calcula la media aritmética o promedio de unos valores.

### Diversión matemática

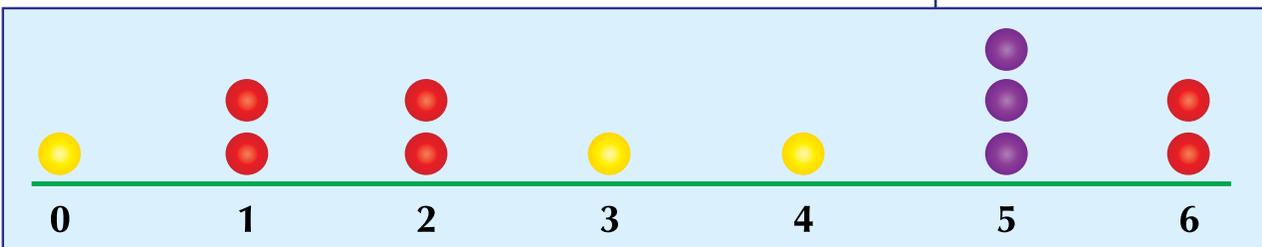
Descubre media y moda, de una manera lúdica

Observa los datos que están mostrando las huellas, sobre las rectas numéricas.

¿Cuál es la media aritmética o promedio de los datos representados en el segmento de recta siguiente?



¿Cuál es la moda de los datos representados en el segmento de recta siguiente?



### Día a día

#### La estadística en los Proyectos productivos

La estadística en los Proyectos Productivos contribuye a dar seguridad en la toma de decisiones para evaluar la mejor opción en el proyecto a desarrollar ya sea agrícola, ganadero, industrial o social. Brinda credibilidad entre los participantes del proyecto. Da seguridad sobre la sostenibilidad y ayuda a identificar la funcionalidad que va a evitar desperdicio de recursos.

Con base en un estudio estadístico se va más seguro a gestionar créditos financieros que permitan hacer realidad el Proyecto Productivo que la persona tiene en mente.

Gracias a los cálculos matemáticos, pueden organizarse, tabularse y graficarse distribuciones de datos recogidos del diario trabajo del campo, según sea el interés de quien elabora el proyecto, y así poder planear el desarrollo del mismo.

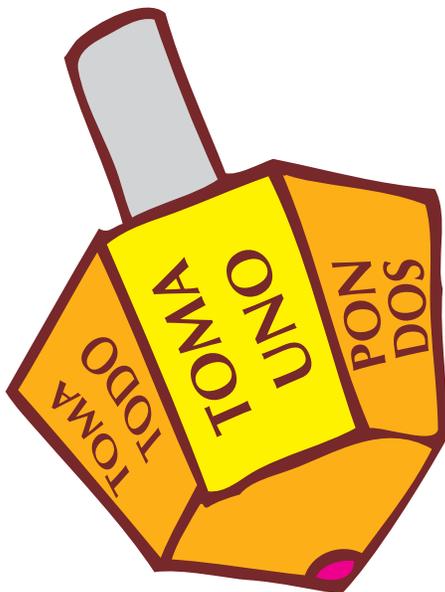
## Tema 3. Probabilidad



### Indagación El juego de la pirinola o la perinola

Es un juego bastante conocido y divierte.

Es un juego de azar porque no se sabe exactamente el resultado que va a salir.



Las caras ocultas de la perinola dicen:

- Pon uno.
- Toma dos.
- Todos ponen.

En tu cuaderno responde y después dialoga con compañeros(as).

- ¿A qué cara le apostarías?
- ¿Estás completamente seguro de que ganarás?
- Cuando sueltas una manzana, ¿ésta sube o cae?

Comparte tus opiniones con las de tus compañeros.

Forma un equipo con dos compañeros y realiza una lectura comentada del texto.



### Conceptualización

Una persona pasa frente a un puesto de billetes de la lotería, se detiene y exclama: ¡si estuviera seguro de ganarme el premio, compraría uno! Pero, ¿es seguro, imposible o probable que este fenómeno suceda?

Consideremos los hechos siguientes:

- Al lanzar un dado, ¿saldrá el 5?
- Extraer una canica roja de una caja que contiene sólo canicas rojas.
- Al lanzar una moneda caerá sello.
- En una bolsa hay tres fichas blancas y una roja. Al sacar dos fichas, por lo menos una es de color blanco.

De algunas situaciones o fenómenos como los anteriores no se puede asegurar si ocurrirán o no. Por ejemplo, lanzar un dado y obtener el 5.



Este fenómeno presenta una serie de resultados

(1, 2, 3, 4, 5, 6),

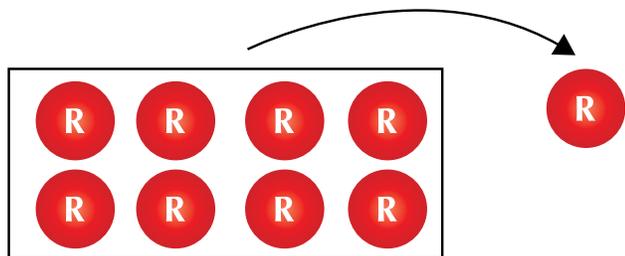
de los cuales no se puede asegurar cuál se dará; obtener el 5 es una posibilidad.

A los fenómenos o situaciones de este tipo se les llama aleatorios o de azar.

**Un fenómeno es aleatorio o de azar cuando, aun conociendo las posibilidades que pueden presentarse, no se puede asegurar cuál será el resultado final.**

En cambio, otros fenómenos tienen únicamente una respuesta.

Por ejemplo, al extraer una canica roja de una caja que contiene sólo canicas rojas, se puede predecir con seguridad cuál será el resultado.



A fenómenos como el anterior se les llama deterministas.

**Un fenómeno es determinista cuando sabemos cómo se produce y lo que ocurriría ante ciertas condiciones.**

También, lanzar una moneda para ver si cae sello es un fenómeno aleatorio, y sacar por lo menos una ficha blanca en la última situación enunciada es determinista.

Así mismo, se puede afirmar que el fenómeno presentado al inicio de esta lección (comprar un billete para ganar el premio de la lotería) es aleatorio o de azar.

**Los fenómenos aleatorios o de azar son estudiados por una rama de las matemáticas: la probabilidad. Mediante ella se determina la posibilidad de obtener un resultado esperado.**

### Espacio muestral (EM)



Si observamos la pirinola, del juego propuesto en la indagación, encontramos las leyendas siguientes:

- Toma uno
- Toma dos
- Toma todo

- Pon uno
- Pon dos
- Todos ponen

Este conjunto de leyendas son los resultados posibles y alguno de ellos va a salir en cada tiro que se haga girar. A este conjunto se le llama *Espacio muestral*.

En los fenómenos aleatorios o de azar no se puede predecir con exactitud lo que sucederá.

Otro caso es el lanzamiento de un dado existen 6 posibles resultados y no se puede predecir con certeza cuál de ellos ocurrirá.

También, al realizar el lanzamiento de una moneda, existe la duda respecto a los resultados: cara o sello.

Si dos equipos se enfrentan en un juego de baloncesto, ¿cuál ganará?, sólo hay tres posibles resultados: la derrota, el empate o la victoria.

Cada uno de los posibles resultados de los experimentos anteriores se llama evento.

**A la colección de todos los resultados posibles de un experimento se le llama Espacio Muestral (EM) o espacio de eventos.**

En la tabla siguiente se muestran los fenómenos aleatorios con su correspondiente espacio muestral.

Fenómeno	Espacio muestral
Lanzamiento de un dado	1, 2, 3, 4, 5, 6
Lanzamiento de una moneda	Cara, sello
Resultado de un partido de fútbol	Triunfo, derrota, empate

Cuando un evento sólo tiene un posible resultado se llama evento simple o elemental.

Ejemplo: al tirar una moneda al aire, hay dos eventos simples: caer cara (c) o caer sello (s).

El espacio muestral se denota: EM.

Pero cuando un evento implica posibilidades diferentes, se denomina evento múltiple.

Ejemplo: si al lanzar un dado, el número esperado fuera par, el evento lo formarían 2,4y 6.

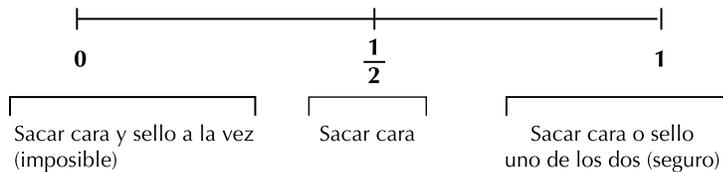
Otros eventos importantes son el evento imposible y el evento seguro.

Evento imposible es aquel resultado de un experimento del cual se sabe con certeza que no podrá ocurrir.

Ejemplo: que al arrojar una vez un dado, con caras numeradas del uno al seis, aparezca el número siete.

Evento seguro es aquel en el que todo elemento del espacio muestral satisface las necesidades para las que se hizo tal experimento.

Se ha convenido asignar el valor numérico 0 (cero) a la ocurrencia de un evento imposible y asignar el valor 1 a la ocurrencia de un evento seguro, de tal manera que la ocurrencia de un evento aleatorio tomará valores entre 0 y 1, así, en el caso de lanzar una moneda, como hay dos eventos posibles (c, s), a la ocurrencia de cada uno de ellos se asigna el valor  $\frac{1}{2}$ .



Por lo tanto, la probabilidad de un evento se mide entre 0 y 1.

Ejemplos:

- ¿Cuáles las probabilidades de resultado al lanzar al aire un dado?  
Puesto que un dado es un cubo, todas las caras tienen la misma oportunidad de quedar hacia Arriba, al lanzar al aire el dado, todos los posibles resultados, o sea el Espacio muestral (EM), son los siguientes:

EM: 1, 2, 3, 4, 5, 6

- ¿Cuál es el espacio muestral (EM) al lanzar una moneda al aire?  
Los posibles resultados de lanzar la moneda son:

EM: cara, sello

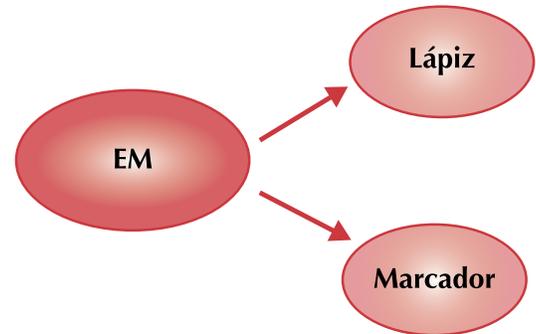
### Diagrama de árbol

La probabilidad se puede representar gráficamente por medio de diagramas de árbol, los cuales reciben ese nombre debido a su apariencia y a su aplicación en probabilidad.

Para ilustrar lo anterior, considérense los siguientes ejemplos:

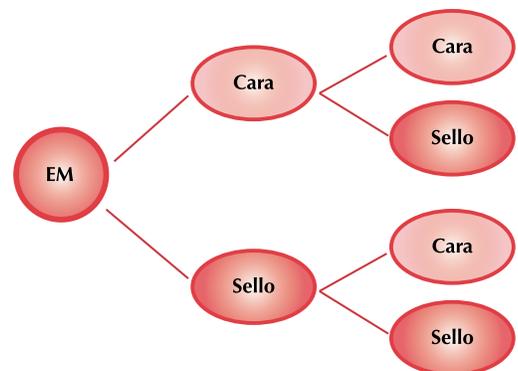
- Un niño tiene en una caja, un lápiz y un marcador, ¿cuál es la probabilidad de que, sin ver, saque de la caja el lápiz o el marcador?

De acuerdo con la probabilidad clásica, ésta es de  $\frac{1}{2}$ , situación que puede representarse gráficamente en un diagrama de árbol, como se muestra a continuación:



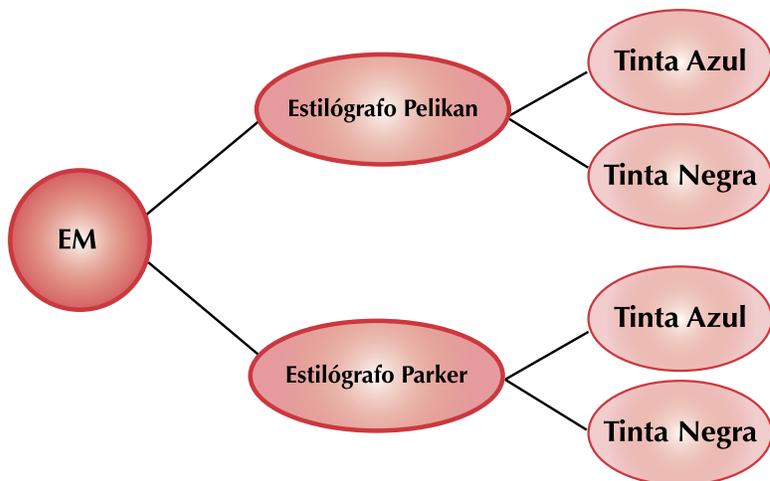
- ¿Cuál es la probabilidad de obtener dos caras, al lanzar una moneda al aire dos veces consecutivas?

Esto se puede representar en un diagrama de árbol de la probabilidad, considerando que el primer lanzamiento tendría dos probables resultados diferentes y que, al lanzar por segunda vez la moneda, cada uno de los dos primeros resultados se combinaría con los dos resultados del segundo lanzamiento.



Se puede observar que existen cuatro diferentes resultados, o sea, que la probabilidad de obtener cara y sello es de  $\frac{1}{4}$ .

- c. José adquirió dos estilógrafos Pelikan (uno de tinta azul y el otro de tinta negra) y 2 estilógrafos Parker (uno de tinta azul y el otro de tinta negra) para utilizarlos en su trabajo, como no tiene ninguna restricción para utilizar cualquier color de tinta, ¿qué probabilidad hay de que utilice un estilógrafo Pelikan de tinta negra?



Esta pregunta se puede contestar si se elabora un diagrama de árbol.

Se aprecia que la probabilidad de utilizar un estilógrafo Pelikan de tinta negra es de  $\frac{1}{4}$ .

Por lo tanto, puede afirmarse que por medio de los diagramas de árbol se logra calcular la probabilidad de un evento, dado el espacio muestral.

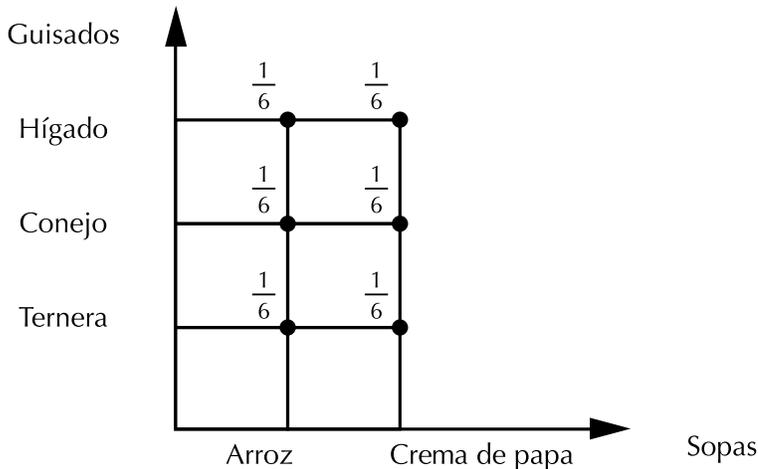
### Diagrama cartesiano

Ya hemos venido manejando el plano cartesiano y podemos aplicarlo ahora.

Véanse los siguientes ejemplos:

- a. Pedro llega a un restaurante y encuentra que del menú del día quedan solamente dos sopas: arroz y crema de papa; y tres guisados: ternera, conejo e hígado. ¿Cuál es la probabilidad de que Pedro pida sopa de arroz y conejo dentro de su menú).

Para llevar a cabo esta representación gráfica se trazan dos líneas: una vertical y otra horizontal, formando ambas un ángulo recto. En cada una de ellas se marcan intervalos similares a los que se hacen en una recta numérica. Se representan las sopas en la línea horizontal y los guisados en la vertical; haciendo que coincida cada sopa con un guisado hasta que queden incluidos todos, como se muestra en la siguiente figura.

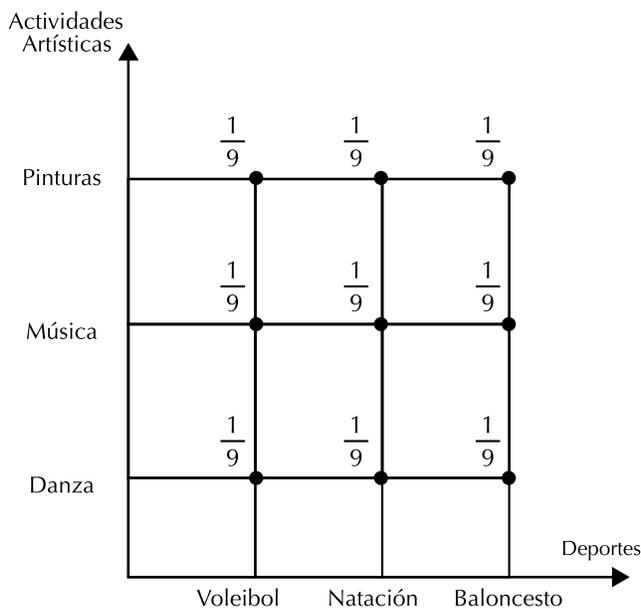


En este diagrama cartesiano se puede apreciar que la probabilidad de que Pedro pida arroz y conejo dentro de su menú es  $\frac{1}{6}$ , puesto que hay 6 combinaciones posibles.



**Aplicación**

- b. María desea asistir a un curso de vacaciones. La escuela en la que pide información ofrece 3 deportes: voleibol, natación y baloncesto; así como 3 actividades artísticas: danza, pintura y música, ¿cuál es la probabilidad de que María escoja participar en voleibol y pintura?



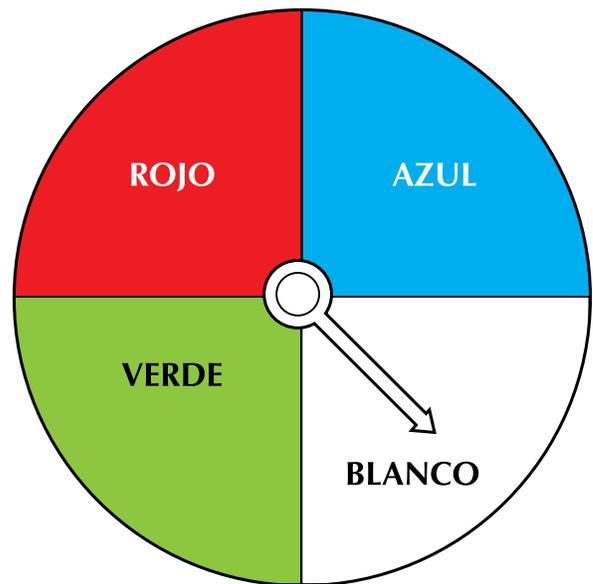
El diagrama cartesiano permite calcular esta probabilidad. Al observar el diagrama cartesiano se encuentra que la probabilidad de que María seleccione voleibol y pintura es de  $\frac{1}{9}$ , ya que el número de combinaciones posibles es 9.

Es conveniente señalar que un fenómeno de azar o aleatorio se podrá representar en un diagrama cartesiano, solamente si existen dos variables o características, ya que se cuenta sólo con dos ejes (horizontal y vertical). Si hay más de dos variables, deberá emplearse otra forma de representación, como el diagrama de árbol.

Copia los ejercicios en tu cuaderno, resuélvelos y compara.

- Escribe en el paréntesis una (O) si el fenómeno es determinista o una (A) si es aleatorio.
  - Obtener un número par al lanzar un dado ( )
  - Sacar un listón rojo de una caja que contiene listones verdes y negros .....( )
- Cuando compras una prenda de vestir, seguramente pides que te muestren los diferentes modelos, tamaños y colores, y entre todos ellos eliges el que más te agrada. Es decir, para hacer una elección es necesario conocer todas las posibilidades.

Observa con cuidado el siguiente dibujo y contesta individualmente lo que se pide. Si se gira la aguja, entonces:



- ¿Cuál es el espacio muestral del experimento?
- ¿Será posible que la aguja señale el color rojo?
- ¿Será posible que la aguja señale el color negro?
- ¿Cuál será un evento seguro?

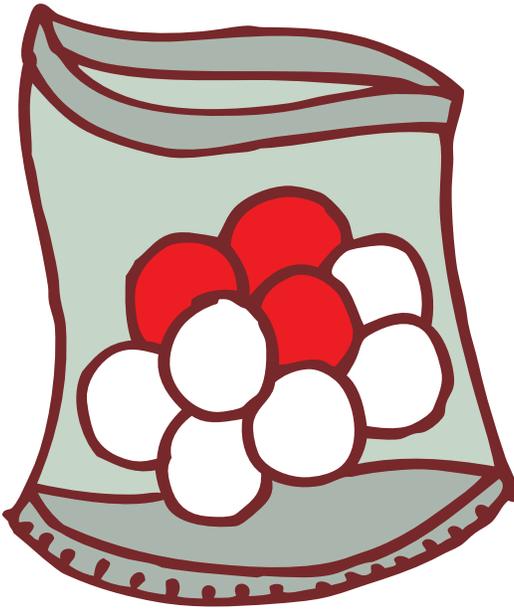


3. La probabilidad de sacar un rey en una baraja española, de 40 cartas.

- Número de elementos del espacio muestral:  
n (EM) = \_\_\_\_\_
- Número de reyes de la baraja: n (A) = \_\_\_\_\_
- Probabilidad de sacar un rey: p (A) = \_\_\_\_\_

4. La probabilidad de sacar una pelota roja de una bolsa que contiene 3 pelotas rojas y 5 blancas.

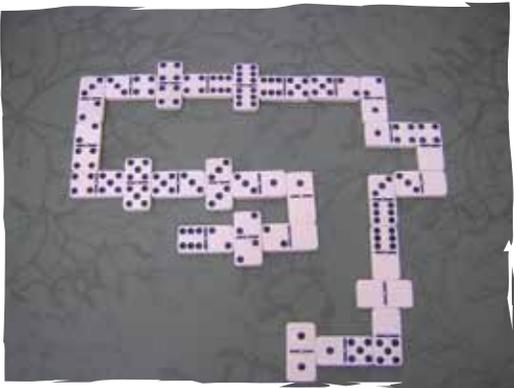
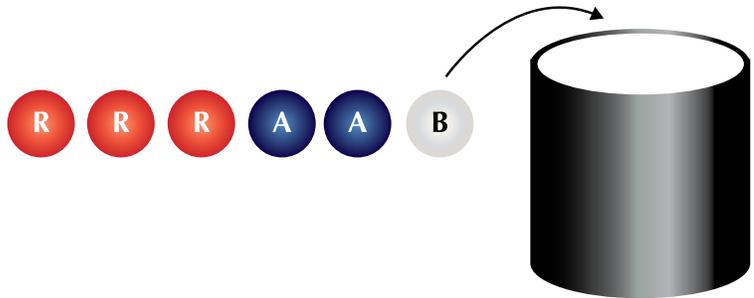
- Número de elementos del espacio muestral:  
n (EM) = \_\_\_\_\_
- Número de pelotas rojas: n (R) = \_\_\_\_\_
- Probabilidad de sacar una pelota roja: p (R) = \_\_\_\_\_



5. La probabilidad de sacar una ficha de dominó que tenga un cinco.

$$n \text{ (EM)} = \quad n \text{ (C)} = \quad p \text{ (C)} =$$

6. En una bolsa negra o en un tarro donde puedas meter la mano, coloca 3 fichas rojas, 2 azules y 1 blanca.



Prepara en tu cuaderno una tabla como la siguiente:

Fichas de colores	Número de veces	
		
		
		
	<b>Total</b>	

Al sacar una ficha, sin mirar:

- ¿A cuál color le apostarías?
- ¿Cuál color tiene más posibilidades de salir?
- ¿Por qué?

Anota los colores escogidos.

- Ahora, saca una ficha del tarro y anota una rayita en la fila del color correspondiente. Devuelve la ficha al tarro y saca otra; anota la rayita y continúa hasta completar por lo menos 50 sacadas.
  - ¿Cuál fue el color que registró mayor frecuencia?
  - ¿Corresponde ese color al que le apostaste?
  - ¿Qué pasó con el color blanco?
  - Calcula la probabilidad de sacar una ficha roja, la de sacar una ficha azul y la de sacar una blanca.

Comenta con tus compañeros la explicación que le das a los resultados.

La experiencia surge de un hecho real y objetivo, se asimila para tomar los elementos necesarios en experiencias futuras. Estos hechos arrojan información que nos permite comprender el fenómeno o suceso, sujeto a estudio.

- Efectúa el experimento de lanzar una moneda 12 veces al aire y anota en la tabla siguiente una cruz las veces que cae cara:

Lanzamiento	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Cara												

- ¿Cuántas veces se ha efectuado el experimento?
- ¿Cuántas veces se ha efectuado el suceso?
- ¿Cuál es la probabilidad empírica o frecuencial del experimento?

Comenta los resultados y las respuestas de tu experimento a otro equipo y encuentren explicaciones para los resultados diferentes.

- En una caja se tienen 17 fichas, de las cuales seis son de color rojo; siete, blancas y cuatro, verdes; al extraer una ficha, los resultados obtenidos fueron los siguientes:

Extracciones	Fichas (veces que sale cada color)
25	13 rojas
50	17 blancas
100	25 verdes

- a. ¿Cuál es la probabilidad empírica o frecuencial de obtener una ficha roja en 25 extracciones?
- b. ¿Cuál es la probabilidad empírica o frecuencial de obtener una ficha blanca en 50 extracciones?
- c. ¿Cuál es la probabilidad empírica o frecuencial de obtener una ficha verde en 100 extracciones?
- d. ¿En cuál de los tres casos es más parecida la probabilidad frecuencial a la probabilidad teórica?

10. Analiza y responde:

- a. ¿Cuál es la probabilidad de que, al lanzar un dado al aire, se obtenga un número primo?
- b. ¿Cuál es la probabilidad de ganar un televisor en una rifa si hay 90 números y se compran 5?

11. Efectúa una serie de 10 lanzamientos de un dado y anota el total de frecuencias obtenido, comprueba que la suma de las frecuencias sea de 10. Una vez realizado el experimento, contesta las preguntas que se indican después de la tabla.

									Frecuencia total

- a. ¿Cuántos lanzamientos se hicieron en total?
- b. ¿Cuál es el espacio muestral en el lanzamiento de un dado?
- c. ¿Cuál es la probabilidad clásica de obtener un 3 al lanzar el dado?
- d. ¿Cuál fue la probabilidad frecuencial de obtener 3 al lanzarlo 10 veces, en el experimento anterior?

Verifica tus respuestas con las de otros dos equipos; si tienes dudas, consulta con tu profesor.

Contesta este ejercicio en forma individual.

12. En 50 lanzamientos de un dado, 22 veces se obtuvieron pares. ¿Cuál es la probabilidad clásica y cuál la probabilidad frecuencial del evento?

Cuando alguien logra resolver algún problema por esfuerzo propio, es decir, sin la ayuda de otro, siente una emoción y una satisfacción muy especiales. Ha llegado el momento en que tú también sientas esa satisfacción propia; para ello, basta que resuelvas algunos problemas en los que aplicarás tus conocimientos.



13. Con un compañero, comenta las respuestas a las siguientes preguntas:

- ¿Qué es un fenómeno aleatorio o de azar?
- ¿Qué es un espacio muestral?
- ¿Cómo se determina la probabilidad frecuencial?

14. En cada uno de los siguientes experimentos, indica cuál es el espacio muestral.

- Se rifa un reloj entre 25 personas.
- Se le pregunta a una persona cuál es su signo zodiacal.
- Se lanzan dos monedas: una de \$100 y otra de \$200, para ver si cae cara o sello.

15. ¿Qué probabilidad existe de que una persona que se encuentra con los ojos vendados saque una canica negra de una caja que contiene 11 canicas blancas, 3 rojas y 6 negras?

16. Al lanzar un dado, ¿cuál es la probabilidad de sacar un número mayor que 2?

17. En un examen de matemáticas, una pregunta tiene 4 posibles respuestas. ¿Cuál es la probabilidad de que se acierte casualmente?

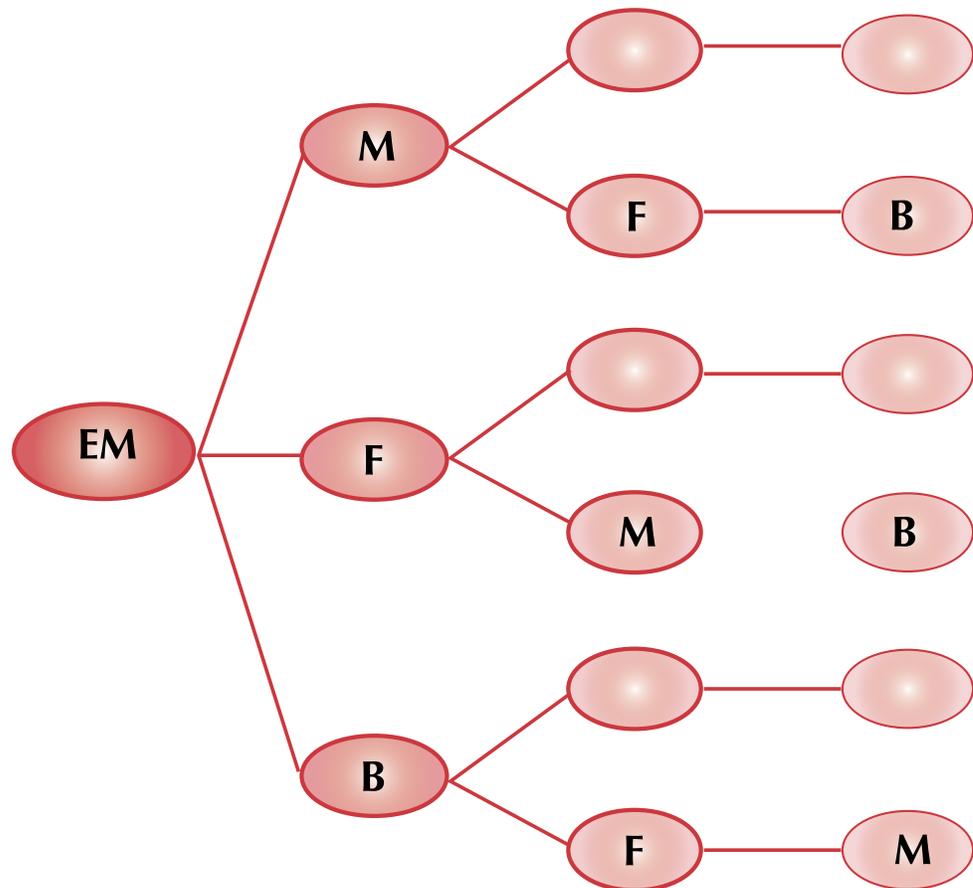
18. En un bus de pasajeros viajan 8 personas; de ellas 3 son mujeres. ¿Cuál es la probabilidad de que en la primera parada baje una persona del sexo masculino?

19. En 50 lanzamientos de un dado, 8 veces se obtuvo el número 6.

- ¿Cuál es el número de aciertos?
- ¿Cuál fue el número de ensayos?

20. Si un estudiante tiene en su mochila un libro de Matemáticas, uno de Biología y uno de Física, ¿cuál es la probabilidad de que, sin ver, saque primero el de Biología, luego el de Física y finalmente el de Matemáticas?





21. Dentro de una caja se tienen 3 canicas: una verde, una roja y una azul, ¿cuál es la probabilidad de que al primer intento se extraiga de la caja la canica roja?  
Justifica tu respuesta elaborando en tu cuaderno un diagrama de árbol que represente la situación dada.
22. Individualmente, elabora el diagrama de árbol que representa la situación que se describe en seguida y contesta lo que se pide.  
Luisa tiene 3 blusas: verde, azul y roja. Además, dos pantalones: negro y blanco. ¿Cuál es la probabilidad de que al combinarlos se vista con blusa azul y pantalón blanco?  
Compara tu diagrama y tu respuesta con los de la clave. En caso de error, corrige.
23. Mario tiene en una caja tres billetes, cuyos valores son de \$2,000, \$5,000 y \$10,000, respectivamente.  
¿Cuál es la probabilidad de que, al primer intento, extraiga el billete de \$ 5,000?

24. El señor Rosales acude a una feria ganadera con el propósito de comprar un caballo. El vendedor le informa que tiene alazanes, rosillos y tordillos, de dos y de tres años de edad. ¿Qué probabilidad existe de que el señor Rosales escoja un alazán de tres años?  
Elabora un diagrama cartesiano para calcular la probabilidad requerida.
25. La señorita Vázquez va a realizar un viaje. Al solicitar información sobre los medios de transporte y los días en los que puede viajar, se enteró de que puede hacerlo en bus, en automóvil o a caballo, solamente jueves, viernes, sábado o domingo de cada semana. ¿Cuál es la probabilidad de que la señorita Vázquez decida viajar a caballo y en día sábado?  
Compara tu diagrama y tu respuesta con los de la clase. Si hay algún error, corrígelo.

### Entendemos por...

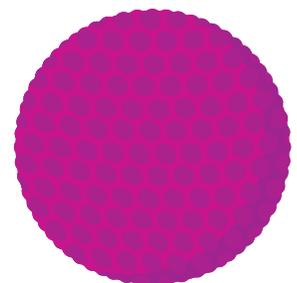
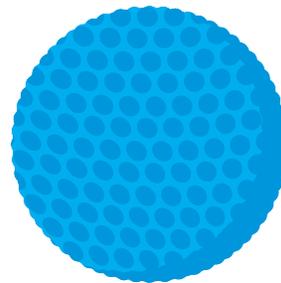
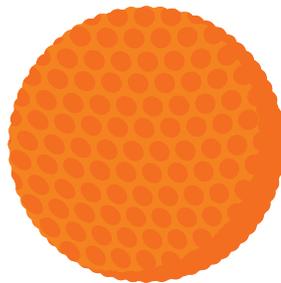
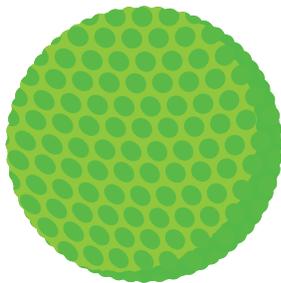
**Posibilidad** la circunstancia u ocasión de que una cosa ocurra o suceda. Por ejemplo cuando decimos la expresión “que venga es solo una posibilidad”, no está asegurado que venga.

**Alternativa** una de al menos dos cosas (objetos abstractos o reales) o acciones que pueden ser elegidas. Desde un punto de vista específico, los objetivos y las alternativas son siempre equivalentes.

### Diversión matemática

Jugando con balotas de colores

¿Cuántos tríos diferentes puedes formar con 4 balotas de colores diferentes?



### Día a día

Juego con monedas

Vamos a jugar en pareja, cada dos estudiantes juegan a lanzar dos monedas, y registran los resultados en su respectivo cuaderno.

Observen cuántas veces las monedas cayeron del mismo lado.

Traten de adivinar cómo caerán las monedas y quien de los dos acierta más.





## Este capítulo fue clave porque

- Me permitió aclarar las ideas sobre población, muestra y variable.
- Adquirí más orden en mi trabajo matemático al organizar información en tablas.
- Adquirí precisión en la construcción de gráficas en el plano cartesiano.

- Sé calcular la mediana y la media aritmética.
- Identifico las medidas de centralización.
- Aprendí a buscar espacio muestrales.

## Conectémonos con Biología Humana



### El órgano de órganos: el cerebro

Probablemente la más compleja, ordenada y fascinante estructura de materia conocida en el universo.

En sólo 1,400 gramos de materia (menos de 1 kilo y medio) albergamos entre **10,000 millones** y **100,000 millones** de neuronas tantas como el número de estrellas de nuestra galaxia.

Cada neurona establece entre 5,000 y 50,000 conexiones con sus células vecinas. Lo cual equivale a construir una red neuronal intercomunicada por **100,000,000,000,000 conexiones**.

- La corteza cerebral extendida, cubriría entre 1,800 y 2,300 centímetros cuadrados.
- Tres cuartas partes del cerebro son agua.
- Un mensaje enviado por el cerebro a cualquier parte de nuestro organismo puede alcanzar una velocidad de 360 kilómetros por hora. Es decir, que un impulso nervioso tarda **2 décimas de segundo en llegar de la cabeza a los pies**.
- El cerebro contiene 30 gramos de colesterol.
- El cerebro ofrece anfractuosidades y circunvoluciones y parece estar tan plegado y apiñado **para ocupar el mínimo espacio posible**. Con todo, el cerebro es tan grande que no nacemos con él totalmente desarrollado. De lo contrario, el bipedismo y el estrechamiento del canal del parto no permitiría que el cerebro cupiese por él.



### El cerebro no puede sentir dolor porque no dispone de nervios capaces de registrarlo.

Los neurocirujanos pueden sondear el cerebro aunque la persona esté consciente. Irónicamente es el encargado de hacernos sentir el dolor del resto del cuerpo.

- El 20% de las necesidades de oxígeno y de calorías de nuestro cuerpo provienen del cerebro, pese al hecho de que el cerebro únicamente supone (de media) un 2% de la masa corporal.
  - Un cerebro adulto **consume en un día entre 250 y 300 calorías**, lo que supone una potencia de cerca de 15 vatios para un cerebro medio.
  - Tenemos **150,000 kilómetros de nervios**. El más grande es la médula espinal, que tiene 45 cm y 3,8 cm de ancho. El más largo, sin embargo, es el tibial, que tiene una longitud de 50 centímetros.
- El máximo voltaje del impulso nervioso es de 100 mili voltios. El máximo número de impulsos: 300 por segundo.

<http://www.xatakaciencia.com/biologia/el-cerebro-humano-en-cifra>

## Repasemos lo visto



Una población es cualquier colección de datos, ya sean mediciones o conteos, sobre una característica particular común con respecto a los elementos de un grupo específico sujeto a un estudio determinado.

Una muestra, en cambio, es la parte de una población que se selecciona de acuerdo con una regla o un plan de trabajo que responda al propósito de la investigación.

Los datos pueden ser de dos tipos: **cuantitativos** y **cualitativos**. Los primeros hacen referencia a una cualidad, lo que permite clasificarlos, y los segundos son de carácter numérico, puesto que provienen de mediciones.

Es importante al determinar los límites de los intervalos asegurarse de que todo dato va a pertenecer a un único intervalo y que ningún dato vaya a quedar fuera de los intervalos.

Frecuencia absoluta ( $f$ ) de un dato estadístico es el número de veces que aparece en una distribución de datos.

Un fenómeno es determinista cuando sabemos cómo se produce y lo que ocurriría ante ciertas condiciones.

Los fenómenos aleatorios o de azar son estudiados por una rama de las matemáticas: Probabilidad.

Mediante ella se determina la posibilidad de obtener un resultado esperado.

A la colección de todos los resultados posibles de un experimento se le llama espacio.

# Mundo rural

## La pesca colombiana

Colombia desarrolla la pesca industrial en sus océanos Atlántico y Pacífico; la pesca artesanal en ambas costas y en aguas continentales (ríos, lagos, lagunas, embalses y canales). Desde los años 80 se ha desarrollado la acuicultura en aguas dulces y marinas, con un notable grado de crecimiento. Por su parte, la pesca deportiva es una actividad de reducido impacto económico que se practica en aguas marinas y continentales.

La pesca marítima colombiana se caracteriza porque posee una amplia variedad de recursos pero limitado volumen por cada una de ellos; sin embargo, aquellos en aprovechamiento son de alto valor comercial y apetecidos en el mercado internacional.

Sus productos se destinan a la exportación y en menor proporción al consumo interno.

Las principales especies objetivo tanto del océano Pacífico como del Atlántico son el atún, camarón de aguas someras y aguas profundas, pesca blanca (pargos, meros y chernas), pequeños pelágicos (carduma y plumuda), langosta y caracol; recientemente se han incrementado las capturas de otras especies oceánicas como dorado y calamar gigante.

El atún se captura básicamente en los límites de la Zona Económica Exclusiva del Océano Pacífico Oriental - OPO, específicamente los atunes aleta amarilla y barrilete.

Si bien el camarón de aguas someras se encuentra sobre-explotado desde los años 80, continúa siendo un recurso representativo; el 30% de sus capturas en el Pacífico y el 95% en el Atlántico son de la flota industrial. Específicamente en el Pacífico, el camarón de aguas profundas se aprovecha de manera sustentable así como la plumuda que se emplea en la producción de harina y aceite de pescado.

La pesca blanca se refiere a recursos de sistemas rocosos (pargos, meros, chernas), tiburones (que ya muestran signos de sobre-explotación), jurel, pez espada y marlin, entre otros. En su mayoría se conserva como pescado entero y filete fresco para exportación; los filetes y el entero congelado se destinan al mercado nacional.

[http://www.fao.org/fishery/countrysector/FI-CP\\_CO/es](http://www.fao.org/fishery/countrysector/FI-CP_CO/es)



## Dato curioso



### Curiosidades de Colombia

**Colombia es un país rico y diverso. Lleno de sorpresas. Asómbtrate con algunas de las maravillas de nuestro país.**



- Segundo país en biodiversidad y primero en biodiversidad por metro cuadrado.
- El Chocó y el Macizo Colombiano tienen el mayor grado de endemismo en el mundo: 18,300 especies de plantas.
- Tercer país del mundo en recursos hídricos: 1,200 ríos -258 son grandes ríos-, 1,600 lagos, 4,500 micro cuencas y 1,900 ciénagas.
- El arrecife de San Andrés es el tercero en el mundo.
- Tenemos 10% de las especies mundiales de anfibios, 733.
- Contamos 1,865 especies de aves.
- 155 colibríes nos hacen el país número uno en esta especie en el mundo.
- Somos el cuarto país en especies de mamíferos, 456 especies.
- Nuestras especies de vertebrados nos hacen el primer país mundial, con 2,890 especies, que corresponden a 10% de vertebrados del mundo.
- Ocupamos el primer lugar en mariposas en el mundo con 3,000 familias y 14,000 especies.
- Contamos con la mayor reserva marina de la biosfera en el planeta.
- Los monópteros (abejas, avispas, hormigas) suman 4,800 especies a nuestra fauna.
- Somos el tercer país en especies de reptiles.
- Contamos con 939 especies de musgo.
- Somos siete veces más pequeños que Brasil y tenemos casi el mismo número de plantas 55 mil, que representan 20% de las plantas del mundo.
- En Colombia un árbol crece tres veces más rápido que en Chile y nueve veces más rápido que en Canadá, lo que nos convierte en una riqueza forestal potencial.
- Somos el segundo exportador mundial y contamos con la mayor diversidad de especies de flores en el mundo, más de 50 mil, de las cuales 3,500 son orquídeas y 233 orquídeas nativas; somos el primer productor de claveles. y el segundo de rosas.
- Cuarto productor de aceite de palma en el mundo y número uno en variedad de palmas.
- Tercer productor mundial de banano.
- Cuarto productor de carbón.
- Nuestro café es reconocido en cualquier país, somos el tercer productor mundial, contamos con el mayor centro de investigación del café en el mundo, y con la planta de café liofilizado más grande de América y la segunda en el mundo.
- Somos el mayor productor de esmeraldas del mundo, con 60%, y tenemos la mina más grande del mundo en Boyacá.
- Segundo exportador de productos agrícolas a Estados Unidos.
- Somos el primer productor de guadua y el segundo en variedades de bambú.
- Tenemos 37 billones de barriles de reserva potencial de petróleo.
- Cartagena es Patrimonio Histórico de la humanidad.
- Nuestro Museo del Oro, el más importante del mundo, es un lugar preferido por los turistas.

Tomado de: <http://www.colombiaya.com/seccion-colombia/curiosidades.htm>

## ¿En qué vamos?



### Coevaluación “Reflexiono y trabajo con mis compañeros”

En tu cuaderno resuelve los ejercicios siguientes:

- En un torneo estudiantil de baloncesto, los equipos tienen nombre de animales. El número de puntos anotados por cada equipo fue el siguiente: Liebres 30, Invencibles 40, Poderosos 20, Águilas 45, Caminantes 15.

Contesta las siguientes preguntas de acuerdo con la gráfica:

- ¿Cuál fue el equipo campeón?
  - ¿Qué equipo anotó menos puntos?
  - ¿Cuál fue el equipo subcampeón?
  - ¿Cuántos puntos fueron anotados en total en el torneo?
  - Si se realizara otro torneo con los mismos equipos, ¿qué equipo tendría la menor probabilidad de ganar? ¿Por qué?
  - Elabora un diagrama de barras.
- Construye una gráfica circular de la siguiente tabla de datos obtenidos por una encuesta sobre preferencias deportivas:

Deporte	Núm. de alumnos
Baloncesto	10
Voleibol	6
Fútbol	9
Béisbol	5
<b>Total</b>	<b>30</b>

- El diario El Tiempo y la emisora RCN acostumbran hacer encuestas de opinión. A la pregunta: ¿Aceptaría usted ser un donante de ojos?, el 62.5% de los encuestados contestaron sí; el 31.25% contestaron no. El resto no contestan o dicen no saber.

- Representa en un diagrama circular la anterior información.
  - Si los entrevistados fueron 2,400 personas, ¿cuántas contestaron sí; cuántas, no; cuántas no respondieron o dijeron no saber?
- Los siguientes datos corresponden a la altura, en pies, de 50 árboles de una finca. Elabora un histograma y un polígono de frecuencias.

Altura árboles finca “La María” (pies)				
Intervalo	Número de árboles	Límite real inferior	Límite real superior	Puntos medios
7-12	7			
13-18	13			
19-24	15			
25-30	9			
31-36	6			

- Sobre una cubeta, cuya capacidad es de 12 L, cae el chorro de agua de una llave. Completa la siguiente tabla, considerando que cada 12 segundos cae un litro de agua; calcula:

Número de litros	1					6			
Segundos	12					72			
Constante de proporcionalidad									

- ¿En cuántos segundos se llenará la cubeta?
- ¿Cuántos litros han caído, transcurridos 108 segundos?
- ¿Cómo es la relación que da entre el número de litros y el tiempo?
- ¿Cuál es la constante de proporcionalidad?
- Elabora una tabla mostrando la proporcionalidad.
- Elabora la gráfica correspondiente en tu cuaderno.

## Le cuento a mi profesor

Conversa con tu profesor sobre cuánto aprendiste en esta unidad.

Qué sé hacer	Superior	Alto	Básico	Bajo
Hago inferencias a partir de gráficas estadísticas.	Dada una gráfica, soy capaz de obtener información y conclusiones.	Generalmente obtengo información y conclusiones de gráficas.	Obtengo información y conclusiones de gráficas, con alguna dificultad.	Generalmente no obtengo información y conclusiones de gráficas.
Resuelvo problemas que dan lugar a cálculo de promedio.	Tengo precisión al resolver problemas que dan lugar a cálculo de promedio.	Resuelvo problemas que dan lugar a cálculo de promedio.	Resuelvo problemas que dan lugar a cálculo de promedio, con dificultad en algunos.	No resuelvo bien problemas que dan lugar a cálculo de promedio.
Calculo la probabilidad de ocurrencia de un evento.	Calculo la probabilidad de la ocurrencia de un evento, con precisión.	Calculo la probabilidad de ocurrencia de un evento, con alguna precisión.	A veces calculo la probabilidad de ocurrencia de un evento.	No calculo la probabilidad de ocurrencia de un evento.

## Participo y aprendo

Lee el enunciado y señala con una x la categoría correspondiente, según lo que has aprendido.

Participo y aprendo	Siempre	Casi siempre	A veces	Nunca	¿Qué debo hacer para mejorar?
Llego puntualmente a clase.					
Participo activamente en la clase.					
Respeto a mis compañeros cuando intervienen en clase.					
Cumplo con mis deberes escolares.					
Trato con respeto a las personas con quienes me comunico.					
Respeto la opinión de los demás.					
Le explico a algún compañero aquello que yo sé y que él no entiende.					
Repaso mis apuntes en casa.					
Comparto información con mis compañeros.					
Reconozco la ayuda que me brinda mi profesor(a).					

## Unidad 1

1. 6
2. 6
3. 6 arreglos y 18 figuras
4. ML = 1050
5. ----
6. MMXI
- 7.

Millones						Unidades					
Millares de Millón			Unidades de Millón			Millares			Unidades		
C	D	U	C	D	U	C	D	U	C	D	U
					9	7	3	8	8	2	5

8. ----
9. 0, 7, 8, 15, 27, 32, 34, 49, 50, 84.

10.

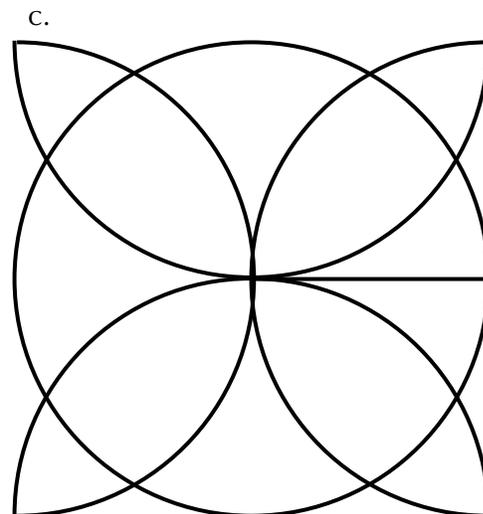
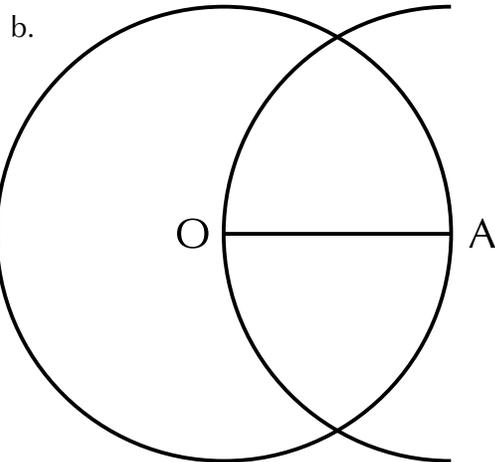
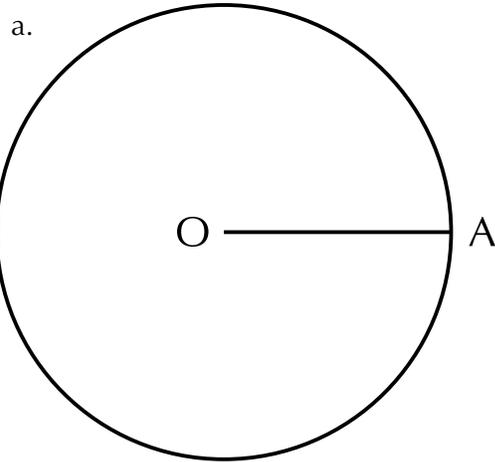
<b>4</b>	<b>3</b>	<b>8</b>
<b>9</b>	<b>5</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>7</b>	<b>6</b>

11.
  - a. Vestido.
  - b. Alimentación.
  - c. Arriendo.
  - d. Transporte.

12.
  - a. =
  - b. <
  - c. =
  - d. =
  - e. >
  - f. ≠
  - g. <

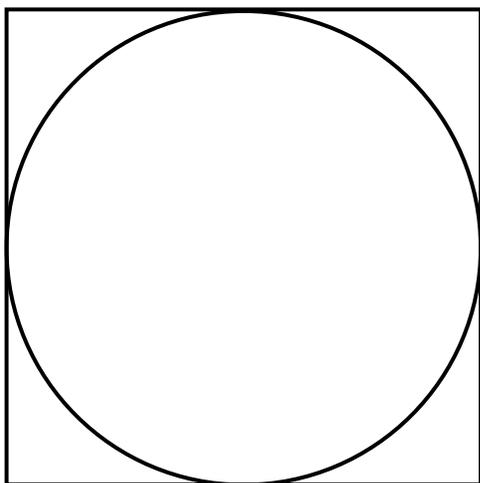
## Unidad 2

1.

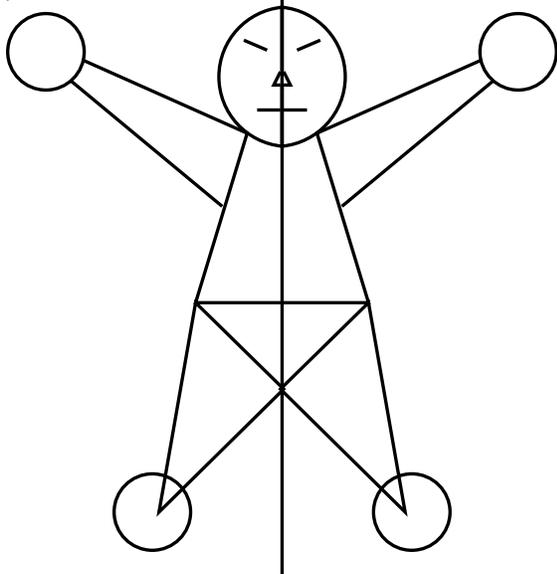


## Unidad 3

2.



3.



4.

- b.  $P = 80 \text{ cm}$
- c.  $A = 375 \text{ cm}^2$

1.

- a. Medios: 5 y 6  
Extremos: 2 y 15
- b. Medios: 12 y 21  
Extremos: 42 y 6
- c. Medios: 11 y 28  
Extremos: 7 y 44
- d. Medios:  $n$  y  $x$   
Extremos:  $m$  y  $y$

2.

- a.  $2 \times 15 = 5 \times 6$   
 $30 = 30$
- b.  $42 \times 6 = 12 \times 21$   
 $252 = 252$
- c.  $7 \times 44 = 11 \times 28$   
 $308 = 308$
- d.  $m \times y = n \times x$

3.

- a.  $m = 14$
- b.  $n = 40$
- c.  $x = 40$
- d.  $y = 1$

4. Vendió 18 revistas.

5. Horas.

7. En esta situación de variación están involucradas magnitudes como: tiempo, el volumen del cono (capacidad total), volumen de agua dentro del cono, altura del nivel del agua en el cono, capacidad del cono y rapidez de llenado del cono entre otras.

Podemos decir que las magnitudes que aumentan en la situación son el tiempo, el volumen de agua en el cono, la altura del nivel del agua dentro del cono; la que disminuye es la capacidad del cono y las que no cambian o permanecen constantes, son el volumen del cono y la rapidez de llenado del cono. A medida que el tiempo transcurre (aumenta), la altura del nivel del agua y la cantidad de agua en el cono

## Unidad 4

aumentan a la vez que la capacidad del cono disminuye.

Como el volumen del cono no cambia y su capacidad ha disminuido totalmente en los 4 minutos, el cono está completamente lleno.

- a. 5 personas no pueden jugar porque, les corresponde 9 cartas a cada uno y sobrarían tres, pero 6 personas sí pueden jugar porque, les corresponde 8 cartas a cada uno y no sobra.

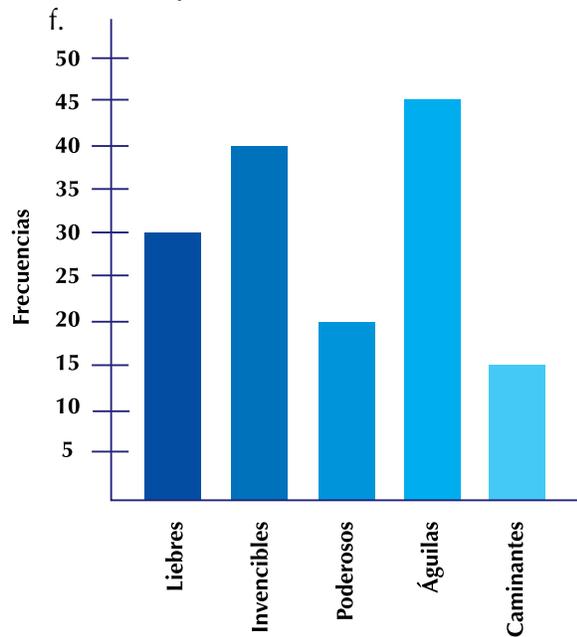
b.

Número de jugadores	x	2	3	4	6	8	12	16	24
Número de cartas que le corresponde a cada uno	y	24	16	12	8	6	4	3	2

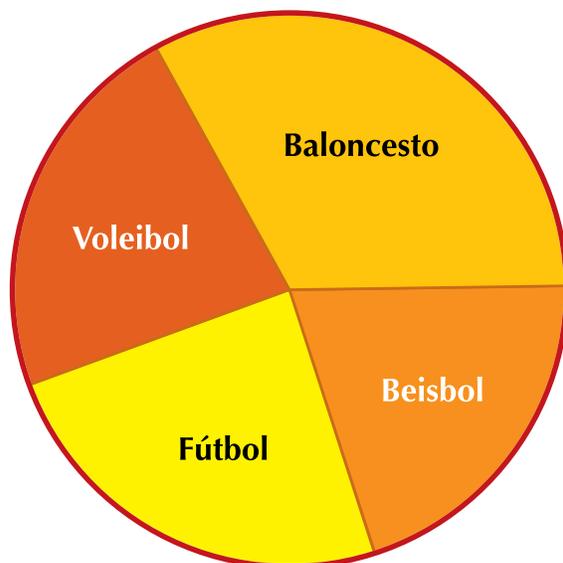
- c. La variación es inversamente proporcional, porque las razones inversas del número de jugadores son equivalentes a las razones correspondientes para el número de cartas, ejemplo:  $\frac{4}{2} = \frac{24}{12}$ , porque  $4 \times 12 = 2 \times 24$ .

1.

- a. Águilas.  
 b. Caminantes.  
 c. Invencibles.  
 d. 150 puntos.  
 e. Caminantes, porque fue el equipo que hizo menos puntos.

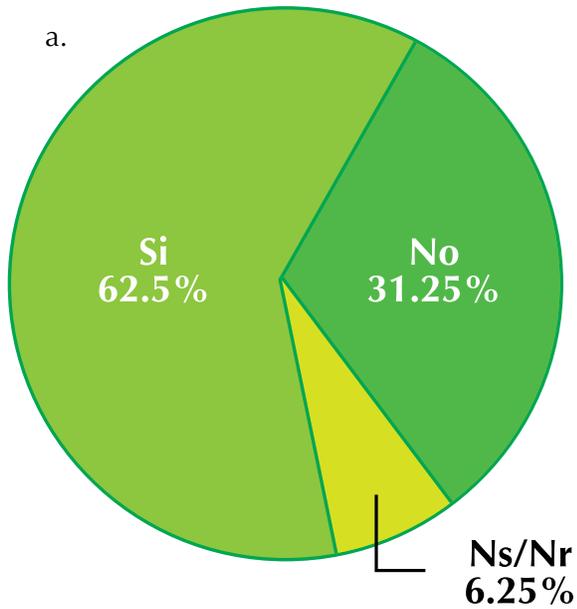


2.



3.

a.

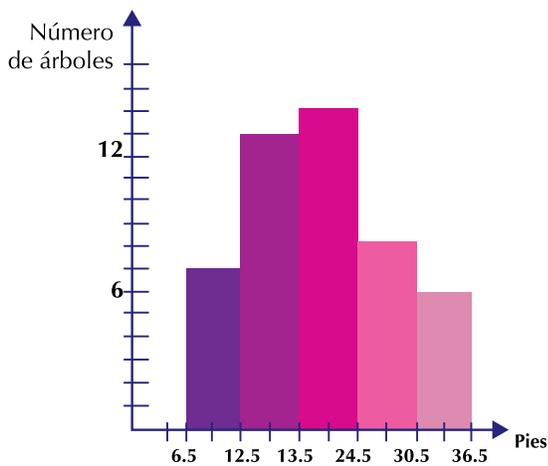


b. Sí: 1,550 entrevistados.  
 No: 750 entrevistados.  
 Ns/Nr: 150 entrevistados.

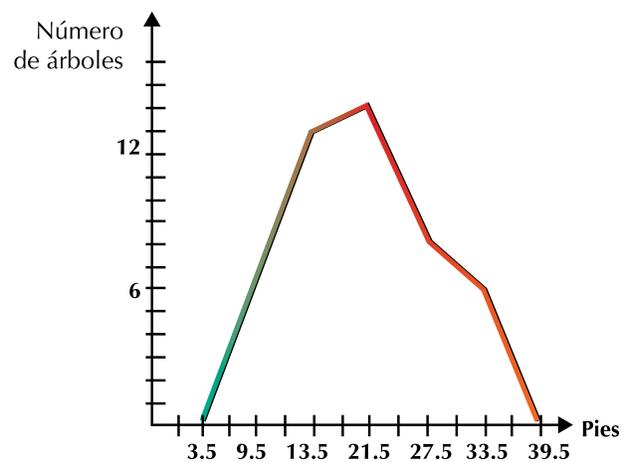
4.

Altura árboles finca "La María" (pies)				
Intervalo	Número de árboles	Límite real inferior	Límite real superior	Puntos medios
7-12	7	6.5	12.5	9.5
13-18	13	12.5	18.5	15.5
19-24	15	18.5	24.5	21.5
25-30	9	24.5	30.5	27.5
31-36	6	30.5	36.5	33.5

**HISTOGRAMA**



**POLÍGONO DE FRECUENCIAS**



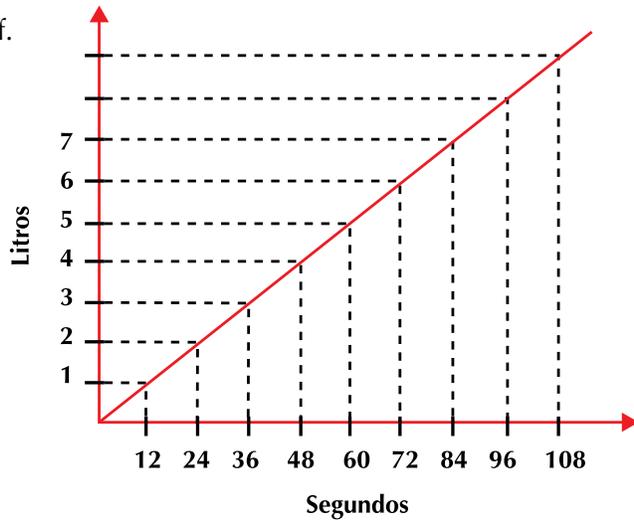
5.

- a. 144
- b. 91
- c. Es directamente proporcional.
- d. 12.

e.

<b>Número de litros</b>	1	2	3	4	5	6	7	8	9
<b>Segundos</b>	12	24	36	48	60	72	84	96	108
<b>Constante de proporcionalidad</b>	12	12	12	12	12	12	12	12	12

f.



*Aritmetica*, ECHEVERRY Carlos H.; OBANDO Gilberto de J.; TROCHEZ José E., Universidad del Valle. Instituto de educación y pedagogía, 1998

DAINTITH John; *Diccionario de Matemáticas*. Norma Editorial. (82- 115).

R. , Robbins, H. *¿Qué es la Matemática?*, ed. Aguilar, Madrid, 1962.

BOYER, Carl B. (1996). *Historia de la Matemática*. Madrid: Alianza Universidad.

NUMERO Y MAGNITUD, *Una perspectiva histórica*, universidad del Valle. Instituto de educación y pedagogía, 1998

SANTOS, Luz Manuel, "Resolución de problemas. El trabajo de Alan Schoenfeld: Una propuesta a Considerar en el

## Ministerio de Educación Nacional

MEN.. Documento 3: Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas. *Revolución educativa Colombia aprende*. Colombia, 2008

MEN.. *Lineamientos curriculares Básicos para el área de Matemáticas*, Colombia, 2008

## Geometría

LOBACHEVSKI, N. *Nuovi Principi della Geometria*, Boringhieri, 1974.

## Física

*Galaxia, Física 10*. Editorial Voluntad. 1998. Pags. 302 - 304.

## Probabilidad y Estadística

ENGEL, Arthur. *Probabilidad y Estadística*, Traducción de MENEU Vicente y MORATA Magdalena, Mestral Universidad, Valencia.

ARENZANA HERNÁNDEZ, Víctor. *Estadística elemental con Excel 2000*, Zaragoza: Mira, 2003.

## Didáctica

ABRANTES, Paulo, “El papel de la resolución de problemas en un contexto de Innovación Curricular”, en: Revista Uno N° 8, Año III, Grao Educación de Serveis Pedagògics, Barcelona, 1996.

AEBLI, Hans, *Doce formas básicas de enseñar*, Madrid, Nacea S. A. de Ediciones, 1988.

Aprendizaje de las Matemáticas”, en: *Revista Educación Matemática*, Vol. 4, N° 2, México D. F., Grupo Editorial Iberoamérica, S.A., 1992.

ARTIGUE, M., “Una introducción a la didáctica de la matemática”, en Enseñanza de la Matemática, Selección bibliográfica, traducción para el PTFD, MCyE 1994.

ARTIGUE, M. (1995), “El lugar de la didáctica en la formación de profesores”, en Ingeniería didáctica en Educación Matemática, Grupo Editorial Iberoamericano.

JOHSUA, S.; DUPIN, J. (2005), *Introducción a la didáctica de las ciencias y la matemática*, Buenos Aires, Colihue.

VASCO, Carlos E., “Un nuevo enfoque para la didáctica de las matemáticas”. volumen I y II, en: Serie Pedagogía y Currículo, Ministerio de Educación Nacional, Bogotá, 1994, pág. 18

## Internet

<http://es.wikipedia.org/wiki/Wikipedia:Portada>

[http://es.wikibooks.org/wiki/Sistema\\_Binario](http://es.wikibooks.org/wiki/Sistema_Binario)

<http://www.mamutmatematicas.com/lecciones/porcentaje-incremento.php>

<http://es.wikipedia.org/wiki/Computadora>

<http://www.disfrutalasmatematicas.com/definiciones/cociente.html>

<http://platea.pntic.mec.es/jescuder/numeros.htm>

<http://www.rinconesdelatlantico.com/num2/permacultura.html>

<http://thiagoonweb.com/?tag=computadorelectricidad>

[http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales\\_didacticos/Geom\\_esp\\_d3/indice.htm](http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Geom_esp_d3/indice.htm)

[http://mmpchile.c5.cl/pag/productos/geo/cu\\_geo.htm](http://mmpchile.c5.cl/pag/productos/geo/cu_geo.htm)

[http://www.utadeo.edu.co/comunidades/estudiantes/ciencias\\_basicas/geometria/simetria\\_04.pdf](http://www.utadeo.edu.co/comunidades/estudiantes/ciencias_basicas/geometria/simetria_04.pdf)

[http://portaleducativo.educantabria.es/binary//99/files99/FiguPla/regulares\\_e\\_irregulares.html](http://portaleducativo.educantabria.es/binary//99/files99/FiguPla/regulares_e_irregulares.html)

<http://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=1159552>

<http://www.dmae.upm.es/cursofractales/capitulo1/3.html>

<http://leonardocodigoabierto.blogspot.com/2006/11/el-hombre-de-vitruvio.html>

[http://www.solla.com/index.php?option=com\\_content&task=view&id=198&Itemid=3122](http://www.solla.com/index.php?option=com_content&task=view&id=198&Itemid=3122)

[http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales\\_didacticos/Geom\\_esp\\_d3/indice.htm](http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Geom_esp_d3/indice.htm)

<http://leonardocodigoabierto.blogspot.com/2006/11/el-hombre-de-vitruvio.html>

[es.wikipedia.org/wiki/Estadística](http://es.wikipedia.org/wiki/Estadística)

[www.aulafacil.com/CursoEstadistica/CursoEstadistica.htm](http://www.aulafacil.com/CursoEstadistica/CursoEstadistica.htm)

[es.thefreedictionary.com/estadística](http://es.thefreedictionary.com/estadística)

[www.hrc.es/bioest/estadis\\_1.html](http://www.hrc.es/bioest/estadis_1.html)

[http://www.ipni.net/ppiweb/mexnca.nsf/\\$webindex/](http://www.ipni.net/ppiweb/mexnca.nsf/$webindex/)

<http://www.alvizlo.sostenibilizarte.es/index.php?showimage=49>

<http://www.elalmanaque.com/acertijos/mates.htm>

<http://leonardocodigoabierto.blogspot.com/2006/11/el-hombre-de-vitruvio.html>

<http://www.solla.com/index.php>

[http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales\\_didacticos/](http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/)

<http://www.lectura-escritura.blogspot.com>

<http://teleobjetivo.org/blog/aerogeneradores-en-torres-de-alta-tension.html>

<http://www.ojodigital.com/foro/>

<http://www.adrformacion.com/cursos/empresas/leccion2/tutorial1.html>

<http://www.disfrutalasmaticas.com/numeros/proporciones.html>

<http://portalevlm.usal.es/blogs/ampliacion/2009/09/>

<http://es.wikipedia.org/wiki/>

## Unidad 1

<http://pequelia.es/19821/los-huesos-del-recien-nacido/>

<http://www.casinojuegos.com/wp-content/uploads/consejos-de-apuestas-para-dados-1.jpg>

<http://huiulatrística.blogspot.com/2011/04/finca-cafetera-lomalinda.html>

<http://www.banrepcultural.org/evento/los-muiscas-trav-s-de-sus-objetos-4>

[http://media.mlive.com/businessreview/western\\_impact/photo/0173403-2jpg-e746494057c34d1a.jpg](http://media.mlive.com/businessreview/western_impact/photo/0173403-2jpg-e746494057c34d1a.jpg)

<http://www.recetariococina.net/el-huevo>

<http://www.panoramio.com/photo/1289535>

<http://cadenasyredestroficadas.wordpress.com/2009/02/>

[http://www.cronicadelquindio.com/noticia-completa-titulo-con\\_la\\_participacion\\_de\\_diversas\\_entidades\\_publicas\\_y\\_el\\_gremio\\_cafetero\\_se\\_presento\\_el\\_plan\\_cosecha-seccion-economicas-nota-18301.htm](http://www.cronicadelquindio.com/noticia-completa-titulo-con_la_participacion_de_diversas_entidades_publicas_y_el_gremio_cafetero_se_presento_el_plan_cosecha-seccion-economicas-nota-18301.htm)

<http://www.taringa.net/posts/ciencia-educacion/10190483/Teoria-del-universo-inflacionario.html>

<http://maribadell.blogspot.com/>

<http://www.motoradictos.com/lamborghini/se-abre-el-primer-concesionario-de-lamborghini-en-espana>

<http://www.forodefotos.com/fotos-personales-y-amigos/7651-inocente-felicidad.htm>

<http://sanssoleilmoda.blogspot.com/2010/10/menos-flores-cortadas.html>

<http://www.asociacioneduco.es/educativas.php>

<http://www.dicyt.com/viewItem.php?itemId=11947>

[http://www.kriyayoga.com/wallpapers/fondos\\_de\\_pantalla/fondos\\_jardines/jardines.html](http://www.kriyayoga.com/wallpapers/fondos_de_pantalla/fondos_jardines/jardines.html)

<http://prietasnotes.blogspot.com/2010/12/last-minute-ideas-ideas-de-ultimo.html>

<http://elcampodecebada.org/wp-content/uploads/2011/03/reuniones PARTICIPACION.jpg>

<http://www.bodaclick.com/bodas/espacios-singulares/finca-villa-palma.html>

<http://www.lacronicadeandalucia.com/category/medio-ambiente/page/2/>

<http://www.estamosenlinea.com.ve/2011/01/31/amadeus-lanza-una-nueva-version-de-e-travel-management-su-herramienta-de-autorreserva-para-empresas/>

<http://manglaresdorados.files.wordpress.com/2010/01/en-los-mercados-callejeros.jpg>

[http://2.bp.blogspot.com/\\_Cx5U920eBfc/S\\_MzJhpyh6I/AAAAAAAAACM/UmLA9f6Js9s/s1600/la+paz+071.JPG](http://2.bp.blogspot.com/_Cx5U920eBfc/S_MzJhpyh6I/AAAAAAAAACM/UmLA9f6Js9s/s1600/la+paz+071.JPG)

<http://www.panoramio.com/photo/3780518>

<http://www.colombia.travel/es/turista-internacional/multimedia/galeria/parques-naturales>

<http://www.heavyequipmentforums.com/showthread.php?19824-Big-Bud-tractors>

[http://apod.nasa.gov/apod/image/0703/bluemarble\\_apollo17\\_big.jpg](http://apod.nasa.gov/apod/image/0703/bluemarble_apollo17_big.jpg)

## Unidad 2

[http://www.sacheco.com.ar/files/productos/1585\\_ANGULO%20AT2510.jpg](http://www.sacheco.com.ar/files/productos/1585_ANGULO%20AT2510.jpg)

[http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/b/b4/Calculator\\_casio.jpg?uselang=es](http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/b/b4/Calculator_casio.jpg?uselang=es)

<http://osofetecolorete.wordpress.com/2007/04/25/como-hacer-una-caja-de-papel/>

[http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/4/45/Tierra\\_1.JPG?uselang=es](http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/4/45/Tierra_1.JPG?uselang=es)

<http://matematicas.itam.mx>

[http://www.indice de paginas .com/test\\_cubos](http://www.indice de paginas .com/test_cubos)

<http://www.miventadegarage.com.uy/wp-content/uploads/2011/05/3-canastos-Portico.jpg>

[http://mmpchile.c5.cl/pag/productos/geo/cu\\_geo.htm](http://mmpchile.c5.cl/pag/productos/geo/cu_geo.htm)

[http://mmpchile.c5.cl/pag/productos/geo/cu\\_geo.htm](http://mmpchile.c5.cl/pag/productos/geo/cu_geo.htm)

<http://www.infantilyprimaria.com/cono-1.htm>

[http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/e/e3/Apis\\_mellifera\\_carnica\\_worker\\_honeycomb\\_2.jpg](http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/e/e3/Apis_mellifera_carnica_worker_honeycomb_2.jpg)

[http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/f/f9/Flower\\_blur.jpg?uselang=es](http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/f/f9/Flower_blur.jpg?uselang=es)

[http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/3/32/Fern\\_leaves.jpg?uselang=es](http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/3/32/Fern_leaves.jpg?uselang=es)

[http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/f/fb/Broccoli\\_bunches.jpg?uselang=es](http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/f/fb/Broccoli_bunches.jpg?uselang=es)

[http://apod.nasa.gov/apod/image/0804/phages\\_wikipedia\\_big.jpg](http://apod.nasa.gov/apod/image/0804/phages_wikipedia_big.jpg)

[http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/f/f0/Pigeons\\_Sky\\_Sun.jpg?uselang=es](http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/f/f0/Pigeons_Sky_Sun.jpg?uselang=es)

[http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/7/76/Fractal\\_broccoli%282%29.JPG?uselang=es](http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/7/76/Fractal_broccoli%282%29.JPG?uselang=es)

[http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/4/4c/Chicago\\_buildings\\_01.jpg?uselang=es](http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/4/4c/Chicago_buildings_01.jpg?uselang=es)

[http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/2/25/Sachica\\_rupestre.JPG](http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/2/25/Sachica_rupestre.JPG)

[http://s3.amazonaws.com/cocina/public/files/production/steps/images/1576/original/\\_DSC1727.JPG?1326510853](http://s3.amazonaws.com/cocina/public/files/production/steps/images/1576/original/_DSC1727.JPG?1326510853)

<http://abcvoyage.com/wp-content/uploads/2010/03/JaponCarte.jpg>

[http://agrega.educacion.es/galeriaimg/5b/es\\_20071227\\_1\\_5025700/es\\_20071227\\_1\\_5025700\\_captured.jpg](http://agrega.educacion.es/galeriaimg/5b/es_20071227_1_5025700/es_20071227_1_5025700_captured.jpg)

[https://lakekacostura.files.wordpress.com/2012/03/img\\_0770\\_b.jpg](https://lakekacostura.files.wordpress.com/2012/03/img_0770_b.jpg)

[http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/f/f2/Mompox\\_-\\_La\\_Pietra\\_di\\_Bolivar\\_e\\_il\\_rio\\_Magdalena.jpg](http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/f/f2/Mompox_-_La_Pietra_di_Bolivar_e_il_rio_Magdalena.jpg)

<http://delitometro.com.ar/wp-content/uploads/Barrio-Independencia-blancueo-de-paredones.jpg>

[http://www.bankoboev.ru/images/MTI5MjM0/Bankoboev.Ru\\_shikarnye\\_zoloty\\_slitki\\_999\\_9\\_kilo.jpg](http://www.bankoboev.ru/images/MTI5MjM0/Bankoboev.Ru_shikarnye_zoloty_slitki_999_9_kilo.jpg)

[www.esacademic.com/pictures/eswiki/83/Snookered\\_on\\_two\\_reds.jpg](http://www.esacademic.com/pictures/eswiki/83/Snookered_on_two_reds.jpg)

[http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/1/11/Wooden\\_hourglass.jpg](http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/1/11/Wooden_hourglass.jpg)

[http://www.geodezist.info/test/gerald/foto/suvenir/octagon\\_s.gif](http://www.geodezist.info/test/gerald/foto/suvenir/octagon_s.gif)

[http://www.telefuerza.com/sabias\\_que/archivos/4fb636\\_tierra.jpg](http://www.telefuerza.com/sabias_que/archivos/4fb636_tierra.jpg)

[http://www.up.edu.mx/files\\_HTMLObject/image/01Mexico/Noticias%20y%20Eventos%20Mx/reloj.jpg](http://www.up.edu.mx/files_HTMLObject/image/01Mexico/Noticias%20y%20Eventos%20Mx/reloj.jpg)

<http://colegiodelreloj.files.wordpress.com/2010/10/experimentos.jpg>

[http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/3/39/File-Monolito\\_de\\_la\\_Piedra\\_del\\_Sol\\_%28centro%29.jpg](http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/3/39/File-Monolito_de_la_Piedra_del_Sol_%28centro%29.jpg)

<http://aaiiuc3m.files.wordpress.com/2009/08/photo082.jpg>

### Unidad 3

<http://exotikbirds.files.wordpress.com/2011/01/novas-023.jpg>

<http://cdecomunidaddemadrid.files.wordpress.com/2009/04/campos-electromagneticos.jpg>

<http://3.bp.blogspot.com/-bTbUQYmkmaI/TgJKyPUmZYI/AAAAAAAAA2c/OGD1XICjoIU/s1600/suppp.PNG>

<http://static.panoramio.com/photos/original/11273658.jpg>

<http://www.pudeto.cl/wp-content/uploads/2011/01/Miles-de-personas-asiteron-al-IV-Agrofestival.jpg>

<http://www.hospitaldelsur.gov.co/php/BOLETINES/JUN2007/1%20BOLETIN%20CONJUNTOSUR%2007/imagenes/DSC00492.JPG>

<http://www.prensa.argentina.ar/advf/imagenes/4eea6abeb7f92.jpg>

<http://bemil.chosun.com/nbrd/files/BEMIL085/upload/2007/07/A300-600ST%20Beluga%20takes%20off.jpg>

[http://static.domestika.com/34141/imagenes/20091207233336-dsc\\_0336-or.JPG](http://static.domestika.com/34141/imagenes/20091207233336-dsc_0336-or.JPG)

[http://www.ENVILLADELEYVA.com/imagenes/mapa\\_boyaca.jpg](http://www.ENVILLADELEYVA.com/imagenes/mapa_boyaca.jpg)

[http://centros.edu.aytolacoruna.es/iesroteropedrayo/Matematicas/Libros/imaxes/Libros\\_037.jpg](http://centros.edu.aytolacoruna.es/iesroteropedrayo/Matematicas/Libros/imaxes/Libros_037.jpg)

<http://www.primeradama.gov.py/v1/wp-content/uploads/2009/03/marzo-pd-entrega-de-mochilas-en-la-esc-pj-caballero-4.jpg>

[http://www.mercedes.es/imagesNews/Maybach\\_2010\\_1.jpg](http://www.mercedes.es/imagesNews/Maybach_2010_1.jpg)

<http://deportadas.tv/wp-content/uploads/2010/11/3266963.jpg>

[http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/7/74/Tren\\_renfe\\_470-011-8.jpg](http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/7/74/Tren_renfe_470-011-8.jpg)

[http://agrega.educacion.es/galeriaimg/1e/es\\_20071227\\_1\\_5050993/es\\_20071227\\_1\\_5050993\\_captured.jpg](http://agrega.educacion.es/galeriaimg/1e/es_20071227_1_5050993/es_20071227_1_5050993_captured.jpg)

[http://2.bp.blogspot.com/\\_gcfgz0QXo4c/TALWAO3Vn0I/AAAAAAAAAF0/Jh-PlwdZFH-l/s1600/materas+073.JPG](http://2.bp.blogspot.com/_gcfgz0QXo4c/TALWAO3Vn0I/AAAAAAAAAF0/Jh-PlwdZFH-l/s1600/materas+073.JPG)

[http://2.bp.blogspot.com/\\_0cHcMqGP\\_cQ/TEG0OLbKfWl/AAAAAAAAABc/GNB0XQLX1a4/s1600/SL272837.JPG](http://2.bp.blogspot.com/_0cHcMqGP_cQ/TEG0OLbKfWl/AAAAAAAAABc/GNB0XQLX1a4/s1600/SL272837.JPG)

[http://2.bp.blogspot.com/-ij1d4HbfkeM/TVQv9Jrj05I/AAAAAAAC84/FRu-6hCFuHEQ/s1600/burj\\_al\\_arab\\_dubai.jpg](http://2.bp.blogspot.com/-ij1d4HbfkeM/TVQv9Jrj05I/AAAAAAAC84/FRu-6hCFuHEQ/s1600/burj_al_arab_dubai.jpg)

## Unidad 4

<http://1.bp.blogspot.com/-cNkC-utejxo/TxbyqZhlerI/AAAAAAAHE/nkmXR7btzxE/s1600/Deportes+en+Iserra+100.jpg>

[http://moto-images.caradisiac.com/IMG/jpg/1/3/7/5/9/supercorsa\\_6\\_.jpg](http://moto-images.caradisiac.com/IMG/jpg/1/3/7/5/9/supercorsa_6_.jpg)

[http://3.bp.blogspot.com/\\_aaYOrIjnOMo/SwGjXrhNSmI/AAAAAAAafs/-KMK2NZdicU/s1600/ALUMNOS+EN+LA+FORMACI%C3%93N.JPG](http://3.bp.blogspot.com/_aaYOrIjnOMo/SwGjXrhNSmI/AAAAAAAafs/-KMK2NZdicU/s1600/ALUMNOS+EN+LA+FORMACI%C3%93N.JPG)

[http://3.bp.blogspot.com/\\_0Mv4ytZQcMk/TIdkLQ8IXnl/AAAAAAAHH0/wWCzY6sXtvY/s1600/SE%C3%91ALES+DE+TRANSITO-REGLAMENTARIAS.jpg](http://3.bp.blogspot.com/_0Mv4ytZQcMk/TIdkLQ8IXnl/AAAAAAAHH0/wWCzY6sXtvY/s1600/SE%C3%91ALES+DE+TRANSITO-REGLAMENTARIAS.jpg)

[http://www.mtc.gob.pe/portal/transportes/caminos\\_ferro/manual/Transito/anexob/pag267a.jpg](http://www.mtc.gob.pe/portal/transportes/caminos_ferro/manual/Transito/anexob/pag267a.jpg)

[http://2.bp.blogspot.com/\\_0Mv4ytZQcMk/TIdjdB6cmoI/AAAAAAAAAHk/0Cqxy4EAP6Q/s1600/SE%C3%91ALES+DE+TRANSITO-INFORMATIVAS.jpg](http://2.bp.blogspot.com/_0Mv4ytZQcMk/TIdjdB6cmoI/AAAAAAAAAHk/0Cqxy4EAP6Q/s1600/SE%C3%91ALES+DE+TRANSITO-INFORMATIVAS.jpg)

[http://planadas-tolima.gov.co/apc-aa-files/65626364343761646238626361663338/Regiones\\_Geogr\\_ficas.jpg](http://planadas-tolima.gov.co/apc-aa-files/65626364343761646238626361663338/Regiones_Geogr_ficas.jpg)

[http://agrega.educacion.es/galeriaimg/06/es\\_20071227\\_1\\_5037168/es\\_20071227\\_1\\_5037168\\_captured.jpg](http://agrega.educacion.es/galeriaimg/06/es_20071227_1_5037168/es_20071227_1_5037168_captured.jpg)

[http://lacomunidad.elpais.com/blogfiles/magazinedeinteligencia/310836\\_DSCN3350.JPG](http://lacomunidad.elpais.com/blogfiles/magazinedeinteligencia/310836_DSCN3350.JPG)

[http://bimg2.mlstatic.com/s\\_MCO\\_v\\_F\\_f\\_19227386\\_371.jpg](http://bimg2.mlstatic.com/s_MCO_v_F_f_19227386_371.jpg)

<http://douglasvermeeren.files.wordpress.com/2010/10/brain-model.jpg>

<http://www.civismoenaccion.com/inicio/wp-content/uploads/2010/09/bandera-colombia.jpg>