Teoría de conjuntos

I. Noción de conjunto

Conjunto es toda agrupación o reunión en la cual los objetos que lo conforman pueden ser abstractos o concretos y deben estar determinados sin ambigüedades.

A. Notación

A = {m; c; p; r}

Nombre del conjunto: A

Elementos del conjunto A: m; c; p; r

B. Cardinal de un conjunto

Es el número que expresa la cantidad de elementos de un conjunto finito.

Ejemplo:

1. A = {2; 3; 6; 7}
   n(A) = 4
2. B = {2; 3; $\cancel{3}$; 5}
   n(B) = 3

C. Relación de pertenencia e inclusión

Relación de pertenencia ($\in$)

Si m pertenece al conjunto A, escribimos:

$$m \in A$$

Ejemplo: A = {2; {3}; 7}

- $2 \in A$
- $3 \notin A$
- $\{3\} \in A$
- $2; 7 \notin A$

Relación de inclusión ($\subset$)

Conjunto a conjunto.

Ejemplo:

A = {2; 3; 7; 8; {1}}

- $2 \not\subset A$
- $\{3\} \subset A$
- $\{1\} \not\subset A$
- $\{\{1\}\} \subset A$

II. Determinación de un conjunto

1. **Por comprensión**

   Cuando se da una característica que presentan todos los elementos de un conjunto.

   Ejemplo:

   M = {los días de la semana}

   $F = \{x/x \in \mathbb{N}; x < 5\}$

2. **Por extensión**

   Se nombran de manera individual cada uno de sus elementos.

   Ejemplo:

   N = {do; re; mi; fa; sol; la; si}

   Q = {0; 1; 2; 3; 4}

III. Gráfica de un conjunto

Diagrama de Venn-Euler

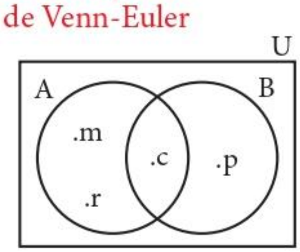


Diagrama de Lewis - Carroll

	Hombres	Mujeres
Bailan		
No bailan		

IV. Clases de conjuntos

A. Conjunto infinito

Número de elementos ilimitados.

$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; ...\}$

$\mathbb{Z} = \{-\infty; ...; -2; -1; 0; 1; 2; 3; ...\infty\}$

B. Conjunto finito

1. **Conjunto vacío o nulo:**

   Se llama así al conjunto que carece de elementos; se denota: $\varnothing$ ó { }.

Ejemplo: $P = \{x/x \in \mathbb{N};\ 1 < x < 2\}$

2. **Conjunto unitario o singletón**
Es el que tiene un solo elemento.
Ejemplo:
a. $A = \{x/x \in \mathbb{N};\ x < 1\}$
$\rightarrow A = \{0\}$
$\rightarrow n(A) = 1$

b. $B = \{6; 6; 6; 6; 6\}$
$\rightarrow n(B) = 1$

c. Si $C = \{5x; 60\}$ es un conjunto unitario, calcula «x».
$5x = 60$
$\boxed{x = 12}$

3. **Conjunto universal**
Es el conjunto que sirve de referencia para el estudio de otros conjuntos incluidos en él.

Trabajando en clase

Nivel básico

1. Dado el conjunto: $C = \{3; 2; 9; \{1\}; 4\}$, determina el valor de verdad de las siguientes afirmaciones.
i) $3 \in C$ ..... ( )
ii) $\{9\} \subset C$ ..... ( )
iii) $\{1\} \subset C$ ..... ( )
iv) $9 \notin C$ ..... ( )
Resolución:
i) Verdadero (V), porque tal y como está es un elemento del conjunto C, $3 \in C$.
ii) Verdadero (V), porque $\{9\} \subset C$.
iii) $\{1\} \subset C$ es falso (F), porque $\{1\} \in C$.
iv) Falso (F), porque 9 si es un elemento de C.

2. Dado el conjunto $A = \{2; 7; \{8\}; 12; 9\}$, determina el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:
i) $\{8\} \subset A$ ..... ( )
ii) $12 \in A$ ..... ( )
iii) $12; 9 \in A$ ..... ( )
iv) $\{2; 7\} \subset A$ ..... ( )

3. Dado el conjunto: $R = \{i; v; e; t; t; c; i; t; a\}$, determina: $n(R)$.

4. Determina: $n(A)$
$$A = \{p; a; m; e; r; c; i; t; o\}$$

Nivel intermedio

5. Si $M = \{2; a; b\}$ es un conjunto unitario, calcula: «a + b».
Resolución
Si M es conjunto unitario, $n(M) = 1$.
Luego, tenemos:
$2 = a = b$
$\rightarrow a = 2$ y $b = 2$
$\therefore a + b = 2 + 2 = 4$

6. Si $R = \{8 - m; 7; n + 2\}$ es un conjunto unitario, calcula «a + b».

7. Dado el conjunto universal:
$$U = \{1; 5; 7: 8; 13; 15; 18\}$$
Además, tenemos:
$A = \{x/x \in U, 9 < x < 11\}$
$B = \{x/x \in U, 13 < x \leq 15\}$
Determina: $n(A) + n(B)$.

Nivel avanzado

8. Determina por extensión el siguiente conjunto:
$$R = \{2\ m/m \in \mathbb{N};\ 2 \leq m < 5\}$$
Resolución
$$R = \{\underset{\uparrow}{2\ m}/m \in \mathbb{N};\ \underbrace{2 \leq m < 5}_{\text{Condición de la variable}}\}$$
Forma como aparecerá por extensión

Tabulando, tenemos:

m	2m
2	2(2) = 4
3	3(2) = 6
4	4(2) = 8

$\Rightarrow R = \{4; 6; 8\}$

9. Determina por extensión el siguiente conjunto:
$$A = \{x + 5/x \in \mathbb{N},\ 2 < x \leq 7\}$$

10. Determina por comprensión el conjunto dado.
$$S = \{3; 6; 9; 12; 15\}$$

Operaciones con Conjuntos

1. Unión o reunión (∪)

Está formado por todos los elementos de los conjuntos participantes.

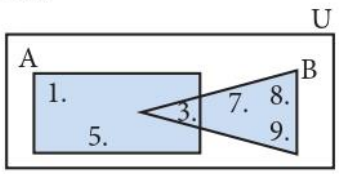
Ejemplo:

Sea: $A = \{1; 3; 5\}$

$B = \{3; 7; 8; 9\}$

$\Rightarrow A \cup B = \{1; 3; 5; 7; 8; 9\}$

Gráficamente:



$A \cup B$

Notación: $A \cup B = \{x/x \in A \text{ o } x \in B\}$

2. Intersección (∩)

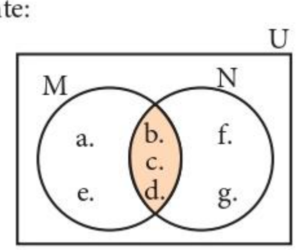
Está formado por los elementos que tienen en común los conjuntos participantes.

Ejemplo:

Sea: $M = \{a; b; c; d; e\}$

$N = \{b; c; d; f; g\}$

Gráficamente:



$M \cap N$

Notación: $A \cap B = \{x/x \in A \text{ y } x \in B\}$

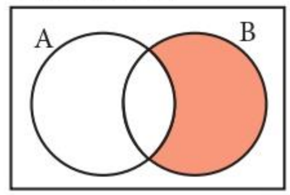
3. Diferencia (–)

Dados los conjuntos A y B, se llama diferencia: A – B, al conjunto formado por todos los elementos que corresponden únicamente al conjunto A. También se puede dar B – A, es decir, los elementos que corresponden únicamente a B.

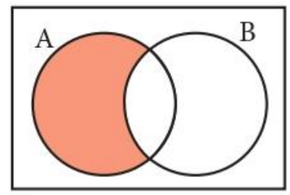
Notación: $A - B = \{x/x \in A \text{ y } x \notin B\}$

$B - A = \{x/x \in B \text{ y } x \notin A\}$

Gráficamente:



B – A (solo B)



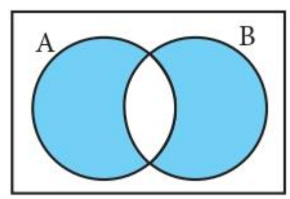
A – B (solo A)

4. Diferencia simétrica (Δ)

Dados los conjuntos A y B, se llama diferencia simétrica al conjunto formado por la unión de A y B, menos la intersección de A y B.

Notación: $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$

Gráficamente:



$A \Delta B$

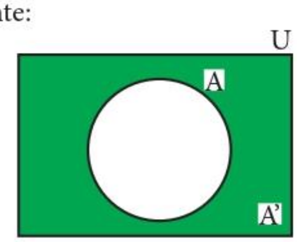
5. Complemento (A')

Dado el conjunto A, que está incluido en el universo U, se denomina complemento de A, al conjunto formado por todos los elementos que no pertenecen a A, pero sí al universo U.

Notación: $A' = \{x/x \in U \text{ y } x \notin A\}$

Es decir: $A' = U - A$

Gráficamente:

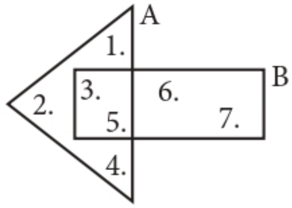


A'

Trabajando en clase

Nivel básico

1. Determina:



a) $A \cap B$
b) $B - A$

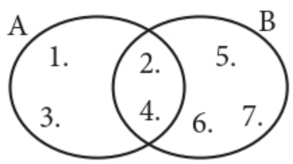
Resolución:

Aplicando las operaciones, tenemos:

✓ $A \cap B$ los elementos comunes de A y B.
$\Rightarrow A \cap B = \{3; 5\}$

✓ $B - A$ únicamente los elementos de B.
$\Rightarrow B - A = \{6; 7\}$

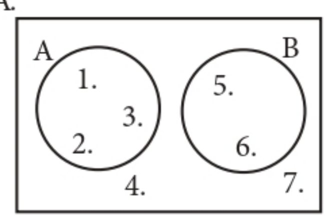
2. Determina:



a) $A \cup B$
b) $A - B$

3. Determina el conjunto $P \cap Q$.
$P = \{x/x \in \mathbb{N}, x < 6\}$
$Q = \{2; 4; 6; 8; 10\}$

4. Calcula A'.

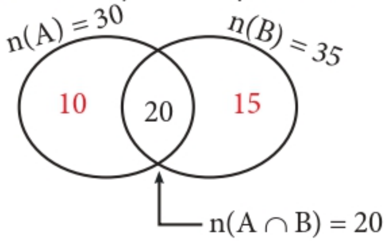


Nivel intermedio

5. Calcula $n(A \Delta B)$, si: $n(A) = 30$; $n(B) = 35$ y $n(A \cap B) = 20$.

Resolución

Graficando los conjuntos A y B, tenemos:



Piden:

$n(A \Delta B) = n(A \cup B) - n(A \cap B)$
$n(A \Delta B) = (10 + 20 + 15) - 20$
$n(A \Delta B) = 45 - 20 = 25$

6. Calcula $n(P \Delta Q)$, si: $n(P) = 28$; $n(Q) = 40$ y $n(P \cap Q) = 19$.

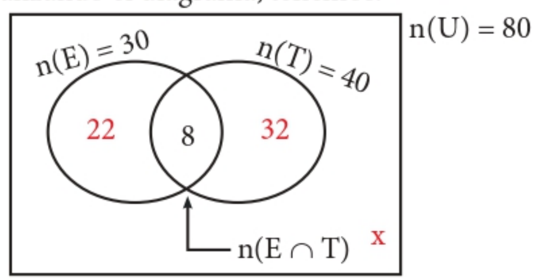
7. Calcula $n(A \cup B)$, si: $n(A) = 50$; $n(B) = 65$ y $n(A \cap B) = 31$.

Nivel avanzado

8. De un grupo de 80 personas, 30 estudian; 40 trabajan; 8 estudian y trabajan, ¿cuántos no estudian ni trabajan?

Resolución

Realizando el diagrama, tenemos:



Donde: E: estudian
T: trabajan
x: las que no estudian ni trabajan

Calculando «x».

$\Rightarrow 22 + 8 + 32 + x = 80$
$x = 80 - 62$
$x = 18$

$\therefore$ 18 personas no estudian ni trabajan.

9. De 300 integrantes de un club deportivo, 160 se inscribieron en natación; 180 se inscribieron en gimnasia y 80 en ambos deportes, ¿cuántos participan en otros deportes?

10. Edwin tomó leche o café todas las mañanas del mes de enero (31 días). Si 20 mañanas tomó leche y 16 mañanas tomó café, ¿cuántas mañanas tomó café con leche?